Ann. Inst. Fourier, Grenoble
31, 1 (1981), 17-37

SUR LA STRUCTURE DE LA SUITE DES DIVISEURS D'UN ENTIER

par P. ERDÖS et G. TENENBAUM (*)

1. Introduction.

Le point de départ de ce travail est une conjecture d'Erdös datant de plus de quarante ans :

C1 : *Presque tout entier* n *possède au moins deux diviseurs* d, d' *tels que* $d < d' \leqslant 2d$.

En 1948, Erdös a montré que la suite des entiers satisfaisant à cette condition possède effectivement une densité asymptotique mais sa méthode ne permet pas d'établir que cette densité a pour valeur 1 [2]. Une justification heuristique de C1 peut être formulée ainsi : comme le nombre des valeurs distinctes des quantités $\log d'/d$, d et d' parcourant les diviseurs de n, est égal à

$$\operatorname{card}\{d|n, d'|n : (d, d') = 1\} = \prod_{p^\nu \| n} (2\nu + 1)$$

et peut donc, grâce à un argument classique, être évalué par $(\log n)^{\log 3 + o(1)}$ pour presque tout n, on peut s'attendre à ce qu'un intervalle I inclus dans $[-\log n, \log n]$ et de longueur λ contienne usuellement $\lambda (\log n)^{\log 3 - 1 + o(1)}$ points $\log d/d'$ distincts ; la conjecture C1 exprime que dans le cas $I = [-\log 2, \log 2]$ le nombre de ces points est au moins égal à 2.

Cet argument a conduit Erdös à formuler la conjecture plus forte suivante, qu'il a annoncé pouvoir établir en 1964 [3] :

(*) Laboratoire Associé au C.N.R.S. n° 226.

C2 : *Pour tout réel positif* ϵ *et presque tout entier* n, *on a :*

$$1 + (\log n)^{1-\log 3-\epsilon} < \min \left\{ \frac{d'}{d} : d \mid n , d' \mid n , d < d' \right\} < 1 + (\log n)^{1-\log 3+\epsilon} .$$

Malheureusement, alors que l'inégalité de gauche a été récemment prouvée, sous une forme légèrement plus précise, par Erdös et Hall [6], celle de droite doit pour le moment rester conjecturale.

Fondée sur le même argument heuristique, une autre conjecture est énoncée par Hall et Tenenbaum dans [9] :

C3 : *Pour tout réel* α *de* $[0,1]$ *et presque tout entier* n, *on a :*

$$\mathrm{U}(n , \alpha) : = \mathrm{card} \left\{ d \mid n , d' \mid n : (d , d') = 1 , \left| \log \frac{d'}{d} \right| \leqslant (\log n)^{\alpha} \right\} = (\log n)^{\log 3 - 1+\alpha+o(1)} .$$

Dans leur article les auteurs prouvent que l'inégalité

$$\mathrm{U}(n , \alpha) \leqslant (\log n)^{\log 3-1+\alpha+o(1)}$$

a effectivement lieu pour presque tout n, mais ils n'obtiennent pas la borne inférieure souhaitée.

Désignons par $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n ; dans le but de prouver C1 , Erdös a introduit la fonction arithmétique $n \longrightarrow \tau^+(n)$ égale au nombre des entiers k pour lesquels l'intervalle $[2^k , 2^{k+1}[$ contient au moins un diviseur de n. On a toujours $\tau^+(n) \leqslant \tau(n)$ et il suffirait, pour prouver C1 , d'établir, pour presque tout n, l'inégalité stricte.

Cela a conduit Erdös (voir par exemple [4]) à émettre la conjecture suivante :

C4 : *Quitte à négliger une suite d'entiers de densité nulle, le rapport* $\tau^+(n)/\tau(n)$ *tend vers* 0 *lorsque* n *tend vers l'infini.*

L'un des objets de cet article est de réfuter C4, prouvant même que toute suite $\mathcal{A}$ telle que $\lim_{n \in \mathcal{A}} \frac{\tau^+(n)}{\tau(n)} = 0$ est de densité nulle

Plus précisément, nous obtenons le résultat quantitatif suivant :

THEOREME 1. — *Pour tout réel positif* ϵ *il existe une constante positive* $c(\epsilon)$ *telle que, pour tout réel* α, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, *la densité supérieure de la suite des entiers* n *satisfaisant à* $\tau^+(n) \leqslant \alpha\,\tau(n)$ *ne dépasse pas* $c(\epsilon)\,\alpha^{1-\epsilon}$.

Remarque. — Ce résultat laisse augurer que la fonction arithmétique τ^+/τ possède une fonction de répartition continue et croissante sur $[0,1]$.

Le reste de cette introduction est consacré plus spécifiquement aux propriétés de l'ensemble *ordonné* des diviseurs d'un entier ; nous notons $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\tau = n$ la suite croissante des diviseurs d'un entier générique n.

Les conjectures C1 et C2 peuvent être traduites par des évaluations de la quantité $\min\left\{\dfrac{d_{i+1}}{d_i} : 1 \leqslant i \leqslant \tau - 1\right\}$. Dans [10], Tenenbaum a établi que la fonction

$$\psi(n) := (\log n)^{-1} \max\left\{\log \frac{d_{i+1}}{d_i} : 1 \leqslant i \leqslant \tau - 1\right\}$$

possède une fonction de répartition continue sur $[0,1]$ et «voisine» de l'identité. A une légère modification près, la démonstration du lemme 7 de [10] implique le résultat suivant :

Soit n *un entier dont la décomposition en produit de facteurs premiers est* $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\nu_i}$, *avec* $p_1 < p_2 < \ldots < p_k$; *alors on a* $\max\limits_{i=1}^{\tau-1} \dfrac{d_{i+1}}{d_i} = \max\limits_{j=1}^{k} p_j / \prod\limits_{i=1}^{k-1} p_i^{\nu_i}$.

Erdős et Hall se sont intéressés à la fonction

$$f(n) := \operatorname{card}\{i(1 \leqslant i \leqslant \tau - 1) : (d_i, d_{i+1}) = 1\},$$

fournissant en particulier une minoration non triviale de son ordre maximal [5]. Cependant, aucun résultat satisfaisant n'a pu être obtenu pour l'ordre moyen de $f(n)$.

Parallèlement à l'étude de $f(n)$, on peut considérer la fonction

$$g(n) := \operatorname{card}\{i(1 \leqslant i \leqslant \tau - 1) : d_i | d_{i+1}\}.$$

Nous montrons le résultat suivant :

THEOREME 2. — *Pour tout réel* α *de* $[0,1]$, *désignons par* $\Delta(\alpha)$ *la densité supérieure de la suite des entiers* n *satisfaisant à* $g(n) \leqslant \alpha\,\tau(n)$. *Alors on a* $\lim\limits_{\alpha \to 0} \Delta(\alpha) = 0$.

Ce résultat avait été conjecturé par Montgomery lors du Symposium de Théorie Analytique des Nombres de Durham (1979). Son argument heuristique était le suivant : soit n un entier et p son plus petit facteur premier ; quitte à négliger une suite de n de densité nulle on peut supposer $\log p \leqslant (\log n)^{o(1)}$; de plus, la moitié au moins des diviseurs de n divisent n/p, et, si $d_i \mid \frac{n}{p}$ mais $d_i \nmid d_{i+1}$ on a $d_{i+1} < p\, d_i$, or la mesure de $\bigcup\limits_{d_i \mid (n/p)}]\log d_i, \log p\, d_i[$ ne dépasse pas $\tau(n) \log p$, elle est donc usuellement $\leqslant (\log n)^{\log 2 + o(1)}$ et l'on peut s'attendre à ce que la proportion des $\log d_{i+1}$ contenus dans cette réunion tende vers 0 comme $(\log n)^{\log 2 - 1 + o(1)}$; le résultat espéré nécessite seulement qu'elle soit majorée par une constante $< \frac{1}{2}$.

Ainsi une même idée sous-tend les théorèmes 1 et 2 : les diviseurs d'un entier usuel ne sont pas trop souvent trop proches. Le théorème 2 appelle encore quelques remarques :

(i) *Si le rapport de deux diviseurs consécutifs d'un entier* n *est entier, il est égal au plus petit facteur premier de* n.

En effet, si p est ce facteur premier, avec $p^\nu \| n$, et si $d_i \mid d_{i+1}$ ou bien $p^\nu \nmid d_i$ et l'on a $d_{i+1} = p d_i$, ou bien $p^\nu \mid d_i$ et l'on a $d_{i+1} = q\, d_i$, où q est un facteur premier de n supérieur à p, or ce second cas est absurde : il implique que le diviseur $q\,\frac{d_i}{p}$ de n appartient à l'intervalle $]d_i, d_{i+1}[$.

(ii) Le théorème 2 est le meilleur possible, en ce sens que *pour tout* $\alpha > 0$ *on a* $\Delta(\alpha) > 0$. En effet, notons $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ la suite croissante des nombres premiers et désignons, pour chaque indice k, par $r = r(k)$ le plus grand entier satisfaisant à $p_{k+r} < 2p_k$. Alors $r(k) \longrightarrow \infty$ et pour k assez grand on a $(r+2)\, 2^{-r-1} \leqslant \alpha$. Considérons la suite $\mathfrak{A}$ des entiers sans facteur carré qui sont multiples de $p_k \ldots p_{k+r}$; $\mathfrak{A}$ est de densité positive ; de plus, si $n \in \mathfrak{A}$ et si d_i est un diviseur de n divisible par p_{k+j} mais non par p_{k+s} avec $0 \leqslant j < s \leqslant r$ alors $d_{i+1} \leqslant \frac{p_{k+s}}{p_{k+j}}\, d_i < 2 d_i$ donc $d_i \nmid d_{i+1}$;

on en déduit, pour n dans $\mathcal{A}$

$$g(n) \leqslant \sum_{j=0}^{r+1} \operatorname{card} \left\{ d \mid n : \left(d , \prod_{i=0}^{j-1} p_{k+i} \right) = 1 \text{ et } \prod_{i=j}^{r} p_{k+i} \mid d \right\}$$
$$\leqslant (r+2)\, 2^{-r-1}\, \tau(n) \leqslant \alpha\, \tau(n) .$$

(iii) Notre démonstration du théorème 2 pourrait donner une majoration explicite de $\Delta(\alpha)$ en fonction de α. Cette majoration est certainement très éloignée de l'ordre de grandeur véritable de $\Delta(\alpha)$, aussi nous n'avons pas cherché à la calculer.

(iv) Il est probable que la fonction arithmétique g/τ possède une fonction de répartition continue et croissante sur $[0,1]$ mais nous ne pouvons pas le prouver.

Un autre aspect de la structure d'ordre des diviseurs d'un entier est considéré dans le résultat suivant :

THEOREME 3. – *Pour tout entier n et tout réel $\xi > 1$, posons $h(\xi , n) = \Pi' \dfrac{d_{i+1}}{d_i}$ où l'apostrophe signifie que le produit est étendu aux valeurs de $i \in \{1, 2, \ldots, \tau - 1\}$ pour lesquelles on a $\dfrac{d_{i+1}}{d_i} \leqslant n^{1/\xi}$. Si $\xi = \xi(n)$ est une fonction croissante tendant vers l'infini avec n de façon que $\xi(n)/\log n$ tende vers 0 en décroissant, on a, pour presque tout n.* $\dfrac{\log h(\xi , n)}{\log n} = \xi^{\log 2 - 1 + o(1)}$.

Comme nous le verrons dans la démonstration, ce résultat signifie que les rapports $\dfrac{d_{i+1}}{d_i}$ intervenant dans le produit $h(\xi , n)$ sont essentiellement ceux pour lesquels d_i et d_{i+1} ont les mêmes facteurs premiers supérieurs à $n^{1/\xi}$.

2. Notations.

Les lettres $a, b, d, i, j, k, m, n, \nu, r, s, t$ désignent des entiers non négatifs, alors que les lettres p et q sont utilisées exclusivement pour des nombres premiers.

$a \mid b$ signifie a divise b ; $a \mid b^\infty$ signifie que chaque facteur premier de a divise b ; $p^\nu \| a$ signifie que l'exposant de p dans la décomposition de a est exactement ν.

Les lettres c, c_1, c_2 désignent des constantes absolues positives. Dans l'utilisation des symboles $\ll$ de Vinogradov, toute dépendance éventuelle en fonction des paramètres $\sigma, \theta, \ldots$ sera indiquée sous la forme $\ll_{\sigma,\theta\ldots}$.

Nous notons $\tau(n)$ le nombre des diviseurs d'un entier n et $\Omega(n)$ (resp. $\omega(n)$) le nombre de ses facteurs premiers, comptés avec (resp. sans) leur ordre de multiplicité.

Le plus grand (resp. le plus petit) facteur premier d'un entier $n > 1$ est noté $P^+(n)$ (resp. $P^-(n)$). Par convention $P^+(1) = 1$, $P^-(1) = +\infty$. Pour chaque valeur du paramètre réel $\sigma \geqslant 2$, on note $n \longmapsto \chi(n, \sigma)$ la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ satisfaisant à $P^-(n) \geqslant \sigma$ et l'on pose :

$$\tau(n, \sigma) := \sum_{d|n} \chi(d, \sigma),$$

$$\Omega(n, \sigma) := \sum_{p^\nu \| n, p<\sigma} \nu$$

$$\omega(n, \sigma) := \sum_{p^\nu \| n, p<\sigma} 1.$$

Pour tout réel $\theta > 1$, nous définissons une fonction arithmétique $\tau^+(n, \theta)$ par la formule

$$\tau^+(n, \theta) := \operatorname{card}\{k \in \mathbf{N} : \exists d|n : \theta^k \leqslant d < \theta^{k+1}\};$$

dans le cas $\theta = 2$, nous notons simplement $\tau^+(n, 2) = \tau^+(n)$.

Le symbole $\sum\limits_{d,d'}^{\theta}$ indique une sommation restreinte aux couples d'entiers (d, d') satisfaisant à $d \neq d'$ et $\dfrac{1}{\theta} < \dfrac{d'}{d} < \theta$.

Enfin, par convention, une somme (resp. un produit) portant sur l'ensemble vide est nulle (resp. égal à 1).

3. Résultats préliminaires.

Nous ferons grand usage du résultat suivant, dû à Halberstam et Richert [7] et généralisant un résultat de Hall.

LEMME 1. – *Soit* h *un fonction multiplicative réelle satisfaisant, pour tout* p, *à* $0 \leqslant h(p^j) \leqslant \lambda_1 \lambda_2^j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ *où*

$\lambda_1 \geqslant 0$ *et* $0 \leqslant \lambda_2 < 2$; *on a pour* $x \geqslant 2$

$$\sum_{n<x} h(n) \ll \frac{x}{\log x} \prod_{p<x} \sum_{j=0}^{\infty} h(p^j)\, p^{-j}.$$

Au cours de la démonstration des théorèmes 1 et 2, nous utiliserons la généralisation suivante du lemme 1 :

LEMME 2. – *Soient* u *et* v *deux fonctions arithmétiques multiplicatives réelles satisfaisant, pour tout* p, *à*

$$0 \leqslant u(p^{i+j})\, v(p^j) \leqslant \lambda_i \lambda^j \quad (i, j = 0, 1, 2, \ldots)$$

où $\lambda_i \geqslant 0$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ *et* $0 \leqslant \lambda < 2$.

Si l'on pose, pour tout p,

$$w(p^i) = \frac{\sum_{j=0}^{\infty} u(p^{i+j})\, v(p^j)\, (1 + j \log p)\, p^{-j}}{\sum_{j=0}^{\infty} u(p^j)\, v(p^j)\, p^{-j}} \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

alors on a uniformément en $k \geqslant 1$ *et* $x \geqslant 2$

$$\sum_{n<x} u(kn)\, v(n) \ll \prod_{\substack{p^i \| k \\ p<x}} w(p^i) \prod_{\substack{p^i \| k \\ p \geqslant x}} u(p^i)\, \frac{x}{\log x} \prod_{p<x} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j)\, v(p^j)\, p^{-j}. \qquad (1)$$

Remarque. – Sous certaines hypothèses supplémentaires (par exemple $u(n) > 0$ pour tout n) on peut supprimer le facteur $(1 + j \log p)$ dans la définition de $w(p^i)$, ce qui rend le résultat optimal – cf. par exemple [1] Théorème T. Dans le cas général, cependant, ce facteur supplémentaire est indispensable, comme le montre l'exemple suivant : k est un nombre premier de l'intervalle $\left[\frac{x}{2}, x\right[$, $u(1) = u(k^2) = 1$, $u(n) = 0$ pour $n \neq 1$ ou k^2, $v(n) = 1$ pour tout n ; l'inégalité (1) s'écrit alors : $1 \ll \frac{1 + \log k}{k} \frac{x}{\log x}$.

Démonstration du lemme 2. – Le cas des facteurs premiers $\geqslant x$ de k est trivial ; nous supposons donc $P^+(k) < x$.

On a :

$$\sum_{n<x} u(kn)\, v(n) \log x = \sum_{d \mid k^\infty} u(kd)\, v(d) \sum_{\substack{m < x/d \\ (m,k)=1}} u(m)\, v(m) \left\{ \log \frac{x}{d} + \log d \right\}.$$

Dans un premier temps, le lemme 1 appliqué à

$$n \longmapsto h(n) = \begin{cases} u(n)\, v(n) & \text{si } (n\,,k) = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

permet d'écrire

$$\sum_{\substack{m<x/d \\ (m,k)=1}} u(m)\, v(m) \log x/d \ll \frac{x}{d} \prod_{\substack{p<x \\ p\nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j)\, v(p^j)\, p^{-j}\ ;$$

ensuite on a la majoration triviale

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m<x/d \\ (m,k)=1}} u(m)\, v(m) \log d &\leqslant \frac{x}{d} \log d \sum_{\substack{m<x \\ (m,k)=1}} \frac{u(m)\, v(m)}{m} \\ &\leqslant \frac{x}{d} \log d \prod_{\substack{p<x \\ p\nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j)\, v(p^j)\, p^{-j} \end{aligned}$$

on obtient donc

$$\sum_{n<x} u(kn)\, v(n) \ll \frac{x}{\log x} \sum_{d\mid k^\infty} \frac{u(kd)\, v(d)}{d} (1 + \log d) \prod_{\substack{p<x \\ p\nmid k}} \sum_{j=0}^{\infty} u(p^j)\, v(p^j)\, p^{-j}\ ;$$

le résultat s'en déduit en remarquant que, pour tout d,

$$1 + \log d \leqslant \prod_{p^j \| d} (1 + j \log p).$$

LEMME 3. – *Pour tout couple $(\beta\,, \sigma)$ des réels satisfaisant à $1 < \beta < 2$ et $\sigma \geqslant 2$, notons $\delta(\beta\,, \sigma)$ la densité supérieure de la suite des entiers n satisfaisant à $\tau(n\,, \sigma) \leqslant \tau(n)\ (\log \sigma)^{-\beta \log 2}$. On a $\delta(\beta\,, \sigma) \ll_\beta (\log \sigma)^{\beta - 1 - \beta \log \beta}$.*

Démonstration. – On a, pour tout n, $\tau(n\,, \sigma) \geqslant 2^{-\Omega(n,\sigma)}\tau(n)$, d'où $\delta(\beta\,, \sigma) \leqslant \limsup_{x\to\infty} \dfrac{1}{x}$ card $\{n < x : \Omega(n\,, \sigma) \geqslant \beta \text{ loglog } \sigma\}$. D'après le lemme 1, on a pour $1 < y < 2$

$$\sum_{n<x} y^{\Omega(n,\sigma)} \ll_y x (\log \sigma)^{y-1}\ ;$$

cela implique

$$\delta(\beta\,, \sigma) \leqslant \limsup_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n<x} y^{\Omega(n,\sigma) - \beta \log\log \sigma} \ll_y (\log \sigma)^{y-1-\beta \log y}\,,$$

d'où l'on tire le résultat annoncé en choisissant $y = \beta$.

LEMME 4. – *Il existe une fonction d'une variable* $\epsilon \longmapsto \xi_0(\epsilon)$ *telle que, pour tous réels* $\epsilon, \xi, \sigma, \theta$ *satisfaisant à* $0 < \epsilon \leqslant \frac{1}{5}$, $\xi \geqslant \xi_0(\epsilon)$, $\sigma \geqslant \theta \geqslant 2$, *il existe une suite d'entiers* $\mathfrak{A}$ *possédant les propriétés suivantes :*

(i) *Pour tout* n *de* $\mathfrak{A}$, $P^-(n) \geqslant \theta$.

(ii) *La densité inférieure de* $\mathfrak{A}$ *est au moins égale à*

$$(1 - (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}) \prod_{p<\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

(iii) *Pour tout* n *de* $\mathfrak{A}$, $\sum_{d|n} \chi(d, \sigma)\, \chi^*(d) \geqslant \frac{9}{10}\, \tau(n, \sigma)$ *où* χ^* *est la fonction caractéristique de l'ensemble des entiers* d *satisfaisant à*

$$\sup \left\{ \frac{|\Omega(d, u) - \frac{1}{2} \log(\log u/\log \sigma)|}{\log(\log u/\log \sigma)} : \exp\{\sqrt{\log \xi} \,.\, \log \sigma\} \leqslant u < n \right\} \leqslant \epsilon . \tag{2}$$

Démonstration. – Supposons σ et θ donnés comme indiqué et définissons, pour tout y de $]0,2[$ et tout $u > \sigma$ une fonction arithmétique par

$$f(y, u, n) = \chi(n, \theta)\, \tau(n, \sigma)^{-1} \sum_{d|n} y^{\Omega(d,u)} \chi(d, \sigma) ;$$

c'est une fonction multiplicative ; on a pour $\nu \geqslant 1$

$$f(y, u, p^\nu) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < \theta \\ 1 & \text{si } \theta \leqslant p < \sigma \\ (\nu + 1)^{-1} \sum_{j=0}^{\nu} y^j & \text{si } \sigma \leqslant p < u \\ 1 & \text{si } u \leqslant p . \end{cases}$$

En particulier, on a pour tout $\nu \geqslant 1$

$$0 \leqslant f(y, u, p^\nu) \leqslant (\max\{1, y\})^\nu ;$$

on peut donc appliquer le lemme 1 ; on obtient pour x infini

$$\sum_{n<x} f(y, u, n) \ll_y x \prod_{p<\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \left(\frac{\log u}{\log \sigma}\right)^{(y-1)/2} , \tag{3}$$

la constante impliquée étant localement uniforme en y.

En remarquant que l'on a pour tout n

$$\chi(n,\theta)\,\tau(n,\sigma)^{-1}\sum\left\{\chi(d,\sigma): d|n,\ \Omega(d,u)>\frac{y}{2}\log\frac{\log u}{\log\sigma}\right\}$$
$$\leqslant f(y,u,n)\left(\frac{\log u}{\log\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}y\log y},\quad \text{si}\ \ 1<y<2,$$

et

$$\chi(n,\theta)\,\tau(n,\sigma)^{-1}\sum\left\{\chi(d,\sigma): d|n,\ \Omega(d,u)<\frac{y}{2}\log\frac{\log u}{\log\sigma}\right\}$$
$$\leqslant f(y,u,n)\left(\frac{\log u}{\log\sigma}\right)^{-\frac{1}{2}y\log y},\quad \text{si}\ \ 0<y<1,$$

on obtient, grâce à (3), en choisissant successivement

$$y=y_1=1+1{,}96\,\epsilon \ \text{ et } \ y=y_2=1-1{,}96\,\epsilon,\ \text{pour}\ \ \epsilon\leqslant\frac{1}{5}$$

$$\sum_{n<x}\frac{\chi(n,\theta)}{\tau(n,\sigma)}\sum\left\{\chi(d,\sigma): d|n,\ \left|\Omega(d,u)-\frac{1}{2}\log\frac{\log u}{\log\sigma}\right|\right.$$
$$\left.\geqslant 0{,}98\,\epsilon\log\frac{\log u}{\log\sigma}\right\}$$
$$\ll x\prod_{p<\theta}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\log u}{\log\sigma}\right)^{\frac{1}{2}(y_i-1-y_i\log y_i)}$$
$$\ll x\prod_{p<\theta}\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(\frac{\log u}{\log\sigma}\right)^{-0{,}901\,\epsilon^2} \tag{4}$$

Posons :

$$\Lambda(d,u)=\frac{\Omega(d,u)-\dfrac{1}{2}\log\dfrac{\log u}{\log\sigma}}{\log\dfrac{\log u}{\log\sigma}}$$

et

$$u_k=\exp\{e^k\log\sigma\,.\,\log\xi\}\quad(k=0,1,2,\ldots)\,;$$

d'après (4), on a :

$$\sum_{n<x}\frac{\chi(n,\theta)}{\tau(n,\sigma)}\sum\{\chi(d,\sigma): d|n,\ \sup_{u_k<x}|\Lambda(d,u_k)|\geqslant 0{,}98\,\epsilon\}$$
$$\leqslant c\,x\prod_{p<\theta}\left(1-\frac{1}{p}\right)\sum_{k=0}^{\infty}(e^k\log\xi)^{-0{,}901\,\epsilon^2}$$
$$\leqslant\frac{1}{10}\,x\prod_{p<\theta}\left(1-\frac{1}{p}\right)(\log\xi)^{-(9/10)\,\epsilon^2},$$

pour $\xi\geqslant\xi_1(\epsilon)$.

Comme pour $u \in [u_k, u_{k+1}]$ on a :

$$\left(1 - \frac{1}{\log\log \xi}\right)\left(\Lambda(d, u_k) - \frac{1}{\log\log \xi}\right) \leqslant \Lambda(d, u)$$
$$\leqslant \left(\Lambda(d, u_{k+1}) + \frac{1}{\log\log \xi}\right)\left(1 + \frac{1}{\log\log \xi}\right)$$

pour tout d et tout $\xi \geqslant \xi_2$, on voit finalement que, pour

$$\xi \geqslant \xi_0(\epsilon) := \max\{\xi_1(\epsilon), \xi_2, \exp\exp 1/0{,}01\,\epsilon\},$$

$$\sum \left\{ \chi(n, \theta) : n < x, \sum_{d|n} \chi(d, \sigma)\, \chi^*(d) \leqslant \frac{9}{10}\, \tau(n, \sigma) \right\}$$
$$\leqslant x \prod_{p<\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right) (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2},$$

ce qui achève la démonstration du lemme 4.

Remarques. – (i) L'énoncé du lemme 4 reste évidemment valable si l'on y remplace $\Omega(d, u)$ par $\omega(d, u)$ et, quitte à restreindre ϵ, la constante $\frac{9}{10}$ par toute autre constante numérique < 1.

(ii) Il est bien connu que, pour presque tout diviseur d d'un entier usuel n, et u assez grand, on a $\Omega(d, u) \sim \frac{1}{2}\, \Omega(n, u)$; cela découle, par exemple, facilement de l'inégalité suivante, valable pour tout n, et établie par Hall dans [8],

$$\sum_{d|n} |\omega(d) - \frac{1}{2}\, \omega(n)|^2 \leqslant \frac{1}{4}\, \tau(n)\, \{|\omega(n) - \Omega(n)|^2 + \omega(n)\}.$$

Notre lemme 4 exprime la même idée, de façon quantitative, et, en se restreignant aux diviseurs d tels que $P^-(d) \geqslant \sigma$ des entiers n tels que $P^-(n) \geqslant \theta$.

(iii) Si l'on désire obtenir un résultat valable pour presque tout n et une estimation plus précise de la différence entre $\Omega(d, u)$ et son ordre normal lorsque $u \to \infty$ avec n, on peut appliquer, à quelques légères modifications près, la méthode employée au lemme 4 pour prouver le résultat suivant :

Soit ϵ *un réel positif et* $\xi = \xi(n) \longrightarrow \infty$, *alors on a pour presque tout entier* n

$$\operatorname{card}\left\{ d : d|n,\ \sup_{\xi<u<n} \frac{|\Omega(d, u) - \frac{1}{2}\log\log u|}{(\log\log u \,.\, \log\log\log u)^{1/2}} \geqslant 1 + \epsilon \right\} = o(\tau(n)).$$

4. Preuve des théorèmes 1 et 2.

PROPOSITION 1. – *Soit* $(\epsilon, \xi, \sigma, \theta)$ *un système de nombres réels satisfaisant aux conditions du lemme 4 et* $\mathcal{A}$ *une suite d'entiers possédant les propriétés (i), (ii) et (iii) du lemme 4.*

Alors on a, pour tout n *de* $\mathcal{A}$,

$$\frac{4}{5}\,\frac{\tau(n,\sigma)}{\tau^+(n,\theta)} \leqslant 1 + \frac{1}{\tau(n,\sigma)} \sum_{d,d'|n}^{\theta} \chi(d,\sigma)\,\chi^*(d). \tag{5}$$

Démonstration. – Pour tout n de $\mathcal{A}$, désignons par $k_1 < \ldots < k_r$ la suite des entiers k pour lesquels on a

$$\nu(k) := \sum \{\chi(d,\sigma)\,\chi^*(d) : d|n\,,\ \theta^k \leqslant d < \theta^{k+1}\} \geqslant 1\,.$$

Alors $r \leqslant \tau^+(n,\theta)$ et

$$\sum_{d,d'|n}^{\theta} \chi(d,\sigma)\,\chi^*(d) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \nu(k_i)\,(\nu(k_i)-1) \geqslant \sum_{i=1}^{r} \nu(k_i)^2 - \tau(n,\sigma)\,.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a donc

$$\begin{aligned}\Big\{\sum_{d|n} \chi(d,\sigma)\,\chi^*(d)\Big\}^2 = \Big\{\sum_{i=1}^{r} \nu(k_i)\Big\}^2 &\leqslant r \sum_{i=1}^{r} \nu(k_i)^2 \\ &\leqslant \tau^+(n,\theta) \Big\{\sum_{d,d'|n}^{\theta} \chi(d,\sigma)\,\chi^*(d) + \tau(n,\sigma)\Big\}\,.\end{aligned}$$

La conclusion souhaitée découle de cette inégalité puisque, grâce au lemme 4, on peut minorer le membre de gauche par $\frac{4}{5}\,\tau(n,\sigma)^2$.

PROPOSITION 2. – *Soit* $(\epsilon, \xi, \sigma, \theta)$ *un système de nombres réels satisfaisant aux conditions du lemme 4, et supposons donné un réel* y *de* $]0,1[$. *Si l'on pose pour tout* n

$$f(n) := \frac{\chi(n,\theta)}{\tau(n)} \sum_{d,d'|n}^{\theta} \chi(d,\sigma)\,\chi^*(d), \quad \textit{et}$$

$$f_k(y,n) := \frac{1}{\tau(n)} \sum_{\substack{dd'|n \\ \theta^k \leqslant d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d,\sigma) \sum_{t|\frac{n}{dd'}} y^{\Omega(dt,\theta^k)}\,\chi(t,\sigma)\,, \qquad (k = 0,1,2,\ldots)$$

alors on a

$$f(n) \leqslant \left(\frac{2 \log \xi \,.\, \log \theta}{\log \sigma}\right)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon) \log y} \sum_{k \geqslant \frac{1}{2} \frac{\log \sigma}{\log \theta}} k^{-(\frac{1}{2}+\epsilon) \log y} f_k(y\,,\,n)\,. \tag{6}$$

Démonstration. – On a :

$$f(n) = \frac{\chi(n\,,\,\theta)}{\tau(n)} \sum_{k > [\frac{\log \sigma}{\log \theta}]} \sum^{\theta}_{\substack{d,d'|n \\ (d,d')=1,\theta^k \leqslant d < \theta^{k+1}}} \sum_{t|\frac{n}{dd'}} \chi(dt\,,\,\sigma)\, \chi^*(dt)$$

il suffit donc de montrer que

$$\chi^*(m) \leqslant \left(2k\, \frac{\log \xi \,.\, \log \theta}{\log \sigma}\right)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} y^{\Omega(m,\theta^k)} \tag{7}$$

pour tout $m \geqslant 1$ et tout $k \geqslant \left[\dfrac{\log \sigma}{\log \theta}\right] \geqslant \dfrac{1}{2}\,\dfrac{\log \sigma}{\log \theta}$.

D'une part, si $k \geqslant \dfrac{\log \sigma}{\log \theta} \cdot \log \xi$ et $\chi^*(m) = 1$ on a :

$$\Omega(m\,,\,\theta^k) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log\left(\frac{k \log \theta}{\log \sigma}\right)$$

donc

$$y^{\Omega(m,\theta^k)}\, k^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} \geqslant \left(\frac{\log \sigma}{\log \theta}\right)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y}$$

et (7) est bien vérifiée.

D'autre part si $\dfrac{1}{2}\,\dfrac{\log \sigma}{\log \theta} \leqslant k < \dfrac{\log \sigma}{\log \theta} \cdot \log \xi$, on a :

$$\Omega(m\,,\,\theta^k) \leqslant \Omega(m\,,\,\exp\{\log \xi \,.\, \log \sigma\}) \leqslant \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) \log\log \xi$$

d'où l'on déduit encore que l'inégalité (7) est satisfaite.

PROPOSITION 3. – *Avec les hypothèses et notations de la proposition 2, on a uniformément pour* $x > \theta^{2k-1}$ *et* $k \geqslant 1$

$$\sum_{n<x} f_k(y\,,\,n) \ll_\theta x(\log \sigma)^{-y}\, k^{(y-3)/2} \left\{ k^{(y-1)/2} + (\log 2x\theta^{1-2k})^{(y-1)/2} + \frac{(\log \sigma)^{y/2}}{(\log 2x\theta^{1-2k})^{1/2}} \right\}.$$

Démonstration. – Posons : $S_k(x\,,\,y) = \sum_{n<x} f_k(y\,,\,n)$. Après interversion de sommations on peut écrire

$$\mathrm{S}_k(x\,,\,y) = \sum_{\substack{d,d'\\ \theta^k\leqslant d<\theta^{k+1}}}^{\theta} \sum_{t<x/dd'} \chi(dt\,,\,\sigma)\, y^{\Omega(dt,\theta^k)} \sum_{m<x/tdd'} \tau(mtdd')^{-1}\,. \tag{8}$$

Nous dirons qu'une fonction multiplicative w est «de type τ^{-1}» s'il existe un réel $\delta > 0$ tel que $w(p^\nu) = \dfrac{1}{\nu+1} + \mathrm{O}(p^{-\delta})$ pour tout $\nu \geqslant 1$.

Le lemme 2 permet de majorer la somme intérieure de (8) : on a

$$\sum_{m<x/tdd'} \tau(mtdd')^{-1} \ll x\,\frac{w_1(tdd')}{tdd'}\left(\log\frac{x}{tdd'}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\ll w_1(tdd') \sum_{m<x/tdd'} (\log m)^{-\frac{1}{2}} \ (*)$$

où w_1 est de type τ^{-1}.

En reportant dans (8), on déduit

$$\mathrm{S}_k(x\,,\,y) \ll \sum_{\substack{d,d'\\ \theta^k\leqslant d<\theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d\,,\,\sigma)\, y^{\Omega(d,\theta^k)} \sum_{m<x/dd'} (\log m)^{-\frac{1}{2}} \sum_{t<x/mdd'} y^{\Omega(t,\theta^k)}\,\chi(t\,,\,\sigma)\, w_1(tdd')\,.$$

Le lemme 2 permet à nouveau d'estimer la somme intérieure, on a :

$$\sum_{t<z} y^{\Omega(t,\theta^k)}\,\chi(t\,,\,\sigma)\, w_1(tdd') \ll_\theta \begin{cases} z w_2(dd')\,(\log\sigma)^{-y/2}\, k^{\frac{y-1}{2}}\,(\log z)^{-\frac{1}{2}} & \text{si } z \geqslant \theta^k \\ z w_2(dd')\,(\log\sigma)^{-y/2}\,(\log z)^{\frac{y}{2}-1} & \text{si } \sigma \leqslant z < \theta^k \\ w_1(dd') & \text{si } z < \sigma \end{cases}$$

où w_2 est de type τ^{-1}.

Il existe donc une fonction w_3 de type τ^{-1} telle que

$$\mathrm{S}_k(x\,,\,y) \ll_\theta (\log\ \sigma)^{-y/2} \sum_{\substack{d,d'\\ \theta^k\leqslant d<\theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d\,,\,\sigma)\, y^{\Omega(d,\theta^k)}\, w_3(dd')\,\{\mathrm{A}_k(x) + \mathrm{B}_k(x) + \mathrm{C}_k(x)\} \tag{9}$$

où l'on a posé

(*) Ici et dans les calculs qui vont suivre, $(\log 1)^{-1}$ est systématiquement interprété comme valant 1 dans une sommation.

$$A_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} \sum_{m < x\theta^{1-3k}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} k^{\frac{y-1}{2}} m^{-1} \left(\log \frac{x\theta^{1-2k}}{m}\right)^{-\frac{1}{2}}$$
$$\ll \frac{x}{\theta^{2k}} k^{\frac{y-1}{2}}$$

$$B_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} \sum_{x\theta^{1-3k} < m < x\theta^{1-2k}} (\log m)^{-\frac{1}{2}} m^{-1} \left(\log \frac{x\theta^{1-2k}}{m}\right)^{\frac{y}{2}-1}$$
$$\ll_\theta \frac{x}{\theta^{2k}} (\log 2x\theta^{1-2k})^{\frac{y-1}{2}}$$

et

$$C_k(x) = \frac{x}{\theta^{2k}} (\log \sigma)^{y/2} (\log 2x\theta^{1-2k})^{-\frac{1}{2}}.$$

Enfin, d'après le lemme 2,

$$\sum_{\substack{d,d' \\ \theta^k \leq d < \theta^{k+1}}}^{\theta} \chi(d, \sigma)\, y^{\Omega(d,\theta^k)}\, w_3(dd')$$
$$\ll_\theta \theta^k \sum_{\theta^{k-1} < d' \leq \theta^{k+2}} w_4(d') (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y}{2}-1}$$

(où w_4 est de type τ^{-1})

$$\ll_\theta \theta^{2k} (\log \sigma)^{-y/2} k^{\frac{y-3}{2}}.$$

En reportant dans (9) et en tenant compte des évaluations de $A_k(x)$, $B_k(x)$, $C_k(x)$, on obtient le résultat annoncé.

PROPOSITION 4. — *Soit f la fonction arithmétique définie à la proposition 2. On a pour $0 < y < 1$ et $0 < \epsilon < - \dfrac{1 - y + \frac{1}{2}\log y}{\log y}$*

$$\sum_{n<x} f(n) \ll_{\theta, y, \epsilon} (\log \xi)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} (\log \sigma)^{-1} x + o(x). \tag{10}$$

Démonstration. — On a, d'après (6),

$$\sum_{n<x} f(n) \ll_{\theta, y} \left(\frac{\log \xi}{\log \sigma}\right)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} \sum_{\frac{1}{2}\frac{\log \sigma}{\log \theta} < k < \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\log x}{\log \theta}\right)} k^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y}$$
$$\sum_{n<x} f_k(y, n);$$

utilisant la majoration de la proposition 3, il vient

$$\sum_{n<x} f(n) \ll_{\theta,y} (\log \xi)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} (\log \sigma)^{-y+(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y}$$
$$\left\{ x \sum_{\frac{1}{2}\frac{\log \sigma}{\log \theta} < k \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{\log x}{\log \theta}\right)} k^{y-2-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} + o(x) \right\},$$

la quantité $o(x)$ provenant de la sommation des termes en $(\log 2x\theta^{1-2k})$, traitée par intégration par parties.

Pour $\epsilon < -\dfrac{1-y+\frac{1}{2}\log y}{\log y}$ la série en k est convergente, d'où (10).

Démonstration du théorème 1. – Choisissons $\sigma = \theta = 2$, y dans $]0,1[$ et ϵ dans $\left]0, -\dfrac{1-y+\frac{1}{2}\log y}{\log y}\right[$; d'après la proposition 1, on a $\dfrac{\tau(n)}{\tau^+(n)} \leqslant \dfrac{5}{4}(1+f(n))$ sauf pour une suite de valeurs de n de densité supérieure $\leqslant (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}$. Comme (10) implique l'existence d'une constante $c_1(y,\epsilon)$ telle que

$$\sum_{n<x} f(n) \leqslant c_1(y,\epsilon)(\log \xi)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} x + o(x) ;$$

on en déduit que la densité de la suite des entiers n pour lesquels $\dfrac{\tau(n)}{\tau^+(n)} \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$ ne dépasse pas

$$c_2(y,\epsilon)\,\alpha(\log \xi)^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)\log y} + (\log \xi)^{-(9/10)\epsilon^2}.$$

Si $y > \dfrac{1}{2}$, on peut prendre $\epsilon = \dfrac{1}{5}$; en choisissant alors, pour y suffisamment voisin de 1, la valeur optimale de ξ, soit $\xi = \exp\exp\left\{\dfrac{-\log \alpha}{0{,}036 - 0{,}7\log y}\right\}$, on obtient, comme majoration, une puissance arbitrairement proche de l'unité de α.

Démonstration du théorème 2. – Choisissons $\xi = \exp\{(\log \sigma)^{\frac{1}{2}}\}$, $y = \dfrac{1}{2}$, et $\epsilon = \dfrac{1}{10}$. D'après la proposition 4, on a

$$\sum_{n<x} f(n) \ll_\theta (\log \sigma)^{0,3.\log 2-1} x + o(x). \tag{11}$$

Maintenant, rappelons que

$$f(n) = \frac{\chi(n, \theta)}{\tau(n)} \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma)\, \chi^*(d)$$

et que, d'après le lemme 3, pour $1 < \beta < 2$,

$$\frac{\tau(n, \sigma)}{\tau(n)} \geqslant (\log \sigma)^{-\beta \log 2}$$

sauf pour une suite d'entiers n de densité supérieure majorée par une puissance négative de $\log \sigma$. Comme $0{,}3 . \log 2 - 1 < - \log 2$, on déduit de (11) l'existence de deux réels positifs δ_1, δ_2, et de deux fonctions $\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta)$, tels que l'on ait

$$\chi(n, \theta) \sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma)\, \chi^*(d) \leqslant \lambda_1(\theta)\, (\log \sigma)^{-\delta_1}\, \tau(n, \sigma)$$

sauf pour une suite d'entiers n de densité supérieure majorée par $\lambda_2(\theta)\, (\log \sigma)^{-\delta_2}$.

En utilisant maintenant le lemme 4 et une nouvelle fois le lemme 3, on obtient ainsi l'existence d'une fonction $\theta \longrightarrow \sigma_0(\theta)$ et de deux constantes positives δ_3 et δ_4 telles qu'à tout couple de réels (σ, θ) satisfaisant à $\sigma \geqslant \sigma_0(\theta)$ on puisse associer une suite $\mathcal{B}(\theta, \sigma)$, de densité inférieure au moins égale à $(1 - (\log \sigma)^{-\delta_3}) \prod_{p<\theta} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$ et telle que tout entier n de $\mathcal{B}(\theta, \sigma)$ vérifie

$$P^-(n) \geqslant \theta \tag{12}$$

$$\sum_{d | n} \chi(d, \sigma)\, \chi^*(d) \geqslant \frac{9}{10}\, \tau(n, \sigma) \tag{13}$$

$$\sum_{d, d' | n}^{\theta} \chi(d, \sigma)\, \chi^*(d) \leqslant (\log \sigma)^{-\delta_4}\, \tau(n, \sigma) \tag{14}$$

$$\tau(n, \sigma) \geqslant \frac{\tau(n)}{\log \sigma}. \tag{15}$$

De plus, si $n \in \mathcal{B}(\theta, \sigma)$, la conjugaison des inégalités (13) et (14) implique

$$\begin{aligned} \sum \left\{ \chi(d, \sigma) : d | n,\ \exists d' | n,\ d' \neq d,\ \frac{d}{\theta} < d' < \theta d \right\} & \\ \leqslant \left(\frac{1}{10} + (\log \sigma)^{-\delta_4}\right) \tau(n, \sigma) \leqslant \frac{\tau(n, \sigma)}{5}, & \end{aligned} \tag{16}$$

quitte à modifier $\sigma_0(\theta)$.

Notons $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_\tau = n$ la suite croissante des diviseurs de n. Les inégalités (15) et (16) impliquent

$$\operatorname{card}\left\{i\ (2 \leqslant i \leqslant \tau - 1) : \theta d_{i-1} \leqslant d_i \leqslant \frac{d_{i+1}}{\theta}\right\} \geqslant \frac{4}{5}\,\frac{\tau(n)}{\log\sigma}. \qquad (17)$$

Nous pouvons maintenant achever la démonstration du théorème 2 en prouvant que, pour tout réel positif η, il existe un réel positif ζ tel que la suite des entiers n satisfaisant à

$$g(n) := \operatorname{card}\{i\ (1 \leqslant i \leqslant \tau - 1) : d_i | d_{i+1}\} \geqslant \zeta\,\tau(n), \qquad (18)$$

soit de densité inférieure au moins égale à $1 - \eta$.

Soit, donc, $\eta > 0$, et, k un entier tel que

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} \prod_{r=1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \geqslant 1 - \frac{\eta}{2},$$

où $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ désigne la suite croissante des nombres premiers. Choisissons un réel $\sigma \geqslant \max_{j=1}^{k} \sigma_0(p_j)$ et tel que $(\log\sigma)^{-\delta_3} \leqslant \frac{\eta}{2}$. On pose $\zeta = \dfrac{2}{5\log\sigma}$ et $\mathcal{C} = \bigcup_{j=1}^{k} \{p_j m : m \in \mathcal{B}(p_j, \sigma)\}$.

Si $n = p_j m$ appartient à $\mathcal{C}$, chaque diviseur d_i de m vérifiant $p_j d_{i-1} \leqslant d_i \leqslant \dfrac{d_{i+1}}{p_j}$ est tel que le diviseur de n qui suit immédiatement d_i soit $p_j d_i$; d'après (17) il y a au moins $2\zeta\tau(m) \geqslant \zeta\tau(n)$ tels diviseurs d_i ; donc n satisfait (18). Enfin, la densité inférieure de $\mathcal{C}$ est au moins égale à

$$\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{p_j} \prod_{r=1}^{j-1} \left(1 - \frac{1}{p_r}\right) \{1 - (\log\sigma)^{-\delta_3}\} \geqslant \left(1 - \frac{\eta}{2}\right)^2 \geqslant 1 - \eta,$$

ce qui achève la démonstration.

5. Preuve du théorème 3.

Décomposons chaque entier n sous la forme $n = mt$ avec

$$m = \prod_{\substack{p^\nu \| n \\ p \leqslant n^{1/\xi}}} p^\nu .$$

Les hypothèses de croissance faites sur ξ permettent de montrer facilement que l'on a pour presque tout n

$$\log m = (1 + o(1)) \frac{\log n}{\xi} \tag{19}$$

et

$$\Omega(t) = (1 + o(1) \log \xi . \tag{20}$$

Les preuves de (19) et (20) sont classiques et, partant, laissées au lecteur.

Désignons par

$$1 = m_1 < m_2 < \ldots < m_s = m \quad (\text{resp. } 1 = t_1 < t_2 < \ldots < t_k = t)$$

la suite croissante des diviseurs de m (resp. t) et notons pour chaque j, $1 \leqslant j \leqslant k$, $h_j := \prod'_{(d_{i+1},t)=t_j} \frac{d_{i+1}}{d_i}$, le produit des rapports $\frac{d_{i+1}}{d_i}$ de diviseurs consécutifs de n, étendu aux valeurs de i pour lesquelles $\frac{d_{i+1}}{d_i} \leqslant n^{1/\xi}$ et $(d_{i+1}, t) = t_j$. Si l'on note encore

$$t_j^* = \begin{cases} t_j & \text{si } \forall d|n \quad (d < t_j \Longrightarrow d < t_j n^{-1/\xi}) \\ \max\{d|n : t_j n^{-1/\xi} \leqslant d < t_j\} & \text{sinon} \end{cases}$$

on a

$$h_j \leqslant \frac{t_j}{t_j^*} \frac{t_j m_2}{t_j m_1} \frac{t_j m_3}{t_j m_2} \cdots \frac{t_j m_s}{t_j m_{s-1}} = \frac{t_j}{t_j^*} m \leqslant n^{1/\xi} m$$

d'où

$$h(\xi, n) = \prod_{j=1}^{k} h_j \leqslant (n^{1/\xi} m)^k = \exp\left\{(2 + o(1)) \frac{k \log n}{\xi}\right\},$$

d'après (19). Comme (20) implique $k \leqslant \xi^{\log 2 + o(1)}$, on obtient, pour presque tout n, $\frac{\log h(\xi, n)}{\log n} \leqslant \xi^{\log 2 - 1 + o(1)}$.

Pour établir la minoration, fixons un ϵ dans $\left]0, \frac{1}{2}\right[$ et considérons $\mathrm{T}(n) := \operatorname{card}\left\{d|t, d'|t : 1 \leqslant \frac{d'}{d} \leqslant n^{\xi^{-1+\epsilon}}\right\}$; un argument identique à celui qui a été utilisé dans [9] pour majorer $\mathrm{T}(n, \alpha)$ permet d'établir que pour presque tout n on a :

$$\mathrm{T}(n) \leqslant \tau(t)\, \xi^{\epsilon + o(1)} \leqslant \xi^{\log 2 + \epsilon + o(1)} ;$$

cela implique l'existence d'au moins r diviseurs $\widetilde{t}_1 < \widetilde{t}_2 < \ldots < \widetilde{t}_r$, de t tels que $\frac{\widetilde{t}_{j+1}}{\widetilde{t}_j} \geqslant n^{\xi^{-1+\epsilon+o(1)}}$ $(1 \leqslant j \leqslant r-1)$ et $r \geqslant \xi^{\log 2 - \epsilon + o(1)}$.

Maintenant, pour chaque j $(1 \leqslant j \leqslant r)$, $\widetilde{t}_j$ est un certain diviseur d_i de n ; comme on a $d_{i+i_1} = m_2 d_i \leqslant n^{1/\xi} d_i$ pour un indice $i_1 \geqslant 1$, on voit que le facteur $m_2 = \dfrac{d_{i+i_1}}{d_i} = \prod_{\nu=0}^{i_1-1} \dfrac{d_{i+\nu+1}}{d_{i+\nu}}$ est compté dans $h(\xi, t)$; il en va de même pour $\dfrac{m_3}{m_2} = \dfrac{m_3 d_i}{m_2 d_i} = \dfrac{d_{i+i_2}}{d_{i+i_1}}$ et ainsi de suite ; finalement cela montre que l'on peut écrire

$$m = \frac{m_2}{m_1} \cdots \frac{m_s}{m_{s-1}} = \prod_{\nu=i}^{i+i_s-1} \frac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$$

où chaque $\dfrac{d_{\nu+1}}{d_\nu}$ est $\leqslant n^{1/\xi}$ et où chaque d_ν appartient à l'intervalle $[\widetilde{t}_j, \widetilde{t}_j m]$; on en déduit

$$h(\xi, n) \geqslant m^r \geqslant \exp\left\{(1 + o(1)) \frac{\log n}{\xi} \cdot \xi^{\log 2 - \epsilon + o(1)}\right\} ;$$

comme on peut choisir ϵ arbitrairement petit, cela achève la démonstration.

BIBLIOGRAPHIE

[1] J.-M. DESHOUILLERS, F. DRESS, G. TENENBAUM, Lois de répartition des diviseurs, 1, *Acta Arithm.*, (4) 34 (1979), 273-285.

[2] P. ERDÖS, On the density of some sequences of integers, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 54 (1948), 685-692.

[3] P. ERDÖS, On some applications of probability to analysis and number theory, *J. London Math. Soc.*, 39 (1964), 692-696.

[4] P. ERDÖS, Some unconventional problems in number theory, *Astérisque*, 61 (1979), 73-82.

[5] P. ERDÖS and R.R. HALL, On some unconventional problems on the divisors of integers, *J. Austral. Math. Soc.*, Séries A, 25 (1978), 479-485.

[6] P. ERDÖS and R.R. HALL, The propinquity of divisors, *Bull. London Math. Soc.*, 11 (1979), 304-307.

[7] H. Halberstam and H.-E. Richert, On a result of R.R. Hall, *J. Number Theory,* (1) 11 (1979), 76-89.

[8] R.R. Hall, A new definition of the density of an integer sequence, *J. Austral. Math. Soc.*, Series A, 26 (1978), 487-500.

[9] R.R. Hall et G. Tenenbaum, Sur la proximité des diviseurs, *Proc. of the Symposium on progress in Analytic Number Theory* (Durham 1979), à paraître.

[10] G. Tenenbaum, Lois de répartition des diviseurs, 5, *J. London Math. Soc.*, (2) 20 (1979), 165-176.

Manuscrit reçu le 19 mai 1980.

P. Erdos,
Institut de Mathématiques
Académie des Sciences de Hongrie
Budapest (Hongrie)
et
Département de Mathématiques
UER des Sciences de Limoges
F 87100 Limoges.

G. Tenenbaum,
U.E.R. de Mathématiques
Université de Bordeaux I
F 33405 Talence Cedex.