Extrait de *L'Enseignement mathématique*, T. XXVII, fasc. 1-2, 1981

SUR LA FONCTION: NOMBRE DE FACTEURS PREMIERS DE N

par Paul ERDÖS et Jean-Louis NICOLAS

ABSTRACT. Let $\omega(n)$ be the number of prime factors of n; n is said ω-largely composite if $m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$.

The quantity $Q_l(X)$ of such numbers $\leqslant X$ verifies $e^{c_1\sqrt{\log X}} \leqslant Q_l(X) \leqslant e^{c_2\sqrt{\log X}}$. Then we prove

$$\text{card}\left\{n \leqslant x \mid \omega(n) > \frac{c \log x}{\log\log x}\right\} = x^{1-c+o(1)}$$

and if $\Omega(n)$ is the total number of prime factors of n counted according to multiplicity, $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \frac{\log n}{\log 2}(1+o(1))$.

An integer n is defined ω-interesting if

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

A short study of these numbers is given. We prove that there exists infinitely many strangulation points (n_k) for the function $n - \omega(n)$

i.e. such that: $\quad m < n_k \Rightarrow m - \omega(m) < n_k - \omega(n_k)$

and $\quad m > n_k \Rightarrow m - \omega(m) > n_k - \omega(n_k)$

Finally, we deduce from some formula of A. Selberg the exact order of card $\{n \leqslant x \mid \omega(n) > \alpha \log\log x\}$ for $\alpha > 1$.

INTRODUCTION

Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en facteurs premiers de n. On définit $\omega(n) = k$ et $\Omega(n) = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$. Les fonctions ω et Ω sont additives: une fonction f est additive si $(m, n) = 1$ entraine $f(mn) = f(m) + f(n)$. Hardy et Ramanujan (cf. [Har]) ont démontré en 1917 que la valeur moyenne de $\omega(n)$ était $\log \log n$. En 1934, P. Turan donnait une démonstration simple de ce résultat, en prouvant: (cf. [Tur])

$$\sum_{n=1}^{x} (\omega(n) - \log \log x)^2 = O(x \log \log x).$$

En 1939, M. Kac et P. Erdös démontraient (cf. [Kac]):

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \operatorname{card} \{ n \leqslant x ; \omega(n) \leqslant \log \log x + t\sqrt{\log \log x} \}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2}\, du.$$

Ensuite, P. Erdös ([Erd 1]) et L. G. Sathe ([Sat]) s'intéressaient aux entiers $n \leqslant x$ tels que $\omega(n)$ soit de l'ordre de $c \log \log x$. A. Selberg ([Sel 1]) donnait la « formule de Selberg »

$$(1) \qquad \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)} = z F(z) x (\log x)^{z-1} + o\left(x (\log x)^{\operatorname{Re}(z-2)}\right)$$

où pour $R > 0$, le O est uniforme pour $|z| \leqslant R$; $F(z)$ est la fonction entière

$$F(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_{p} \left(1 + \frac{z}{p-1}\right) \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{z}.$$

Cette formule permet d'obtenir plus simplement les résultats de Sathe. Dans la proposition 3, nous suivrons les idées de A. Selberg pour calculer un équivalent de:

$$\operatorname{card} \{ n \leqslant x \mid \omega(n) > \alpha \log \log x \}, \qquad \alpha > 1.$$

La formule (1) a été étendue par H. Delange (cf. [Del 1] et [Del 2]).

Soit p_k le $k^{\text{ième}}$ nombre premier et posons $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$. Ce nombre A_k est le plus petit entier naturel n tel que $\omega(n) = k$. On dit que n est ω-hautement composé si $m < n \Rightarrow \omega(m) < \omega(n)$. La suite des nombres ω-hautement composés est la suite A_k.

A l'aide du théorème des nombres premiers, on a: $\log A_k \sim p_k \sim k \log k$; on en déduit que pour tout n (cf. [Wri], ch. XVIII):

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log \log n} (1 + o(1))$$

et que $Q_h(X)$ le nombre de nombres ω-hautement composés $\leqslant X$ vérifie:

$$Q_h(X) \sim \frac{\log X}{\log \log X}.$$

On dit maintenant que $n \geqslant 2$ est ω-largement composé, si $1 \leqslant m \leqslant n \Rightarrow \omega(m) \leqslant \omega(n)$. Si $A_k \leqslant n < A_{k+1}$, n est ω-largement composé si et seulement si $\omega(n) = k$. Soit $Q_l(X)$ le nombre de nombres ω-largement composés $\leqslant X$. Nous démontrerons le théorème suivant:

THÉORÈME 1. *Il existe deux constantes* $0 < c_1 < c_2$ *telles que:*

$$\exp(c_1 \sqrt{\log X}) \leqslant Q_l(X) \leqslant \exp(c_2 \sqrt{\log X}) .$$

Nous démontrerons ensuite:

THÉORÈME 2. *Soit* c, $0 < c < 1$. *On a:*

$$f_c(x) = \operatorname{card} \left\{ n \leqslant x \,;\, \omega(n) > \frac{c \log x}{\log \log x} \right\} = x^{1-c+o(1)} .$$

Entre les résultats obtenus par la formule de Selberg et le théorème 2, il y a un trou à boucher, pour estimer par exemple: card $\{n \leqslant x \mid \omega(n) > (\log x)^\alpha\}$, $0 < \alpha < 1$. Kolesnik et Straus (cf. [Kol]) ont donné une formule asymptotique assez compliquée qui fournit partiellement une solution à ce problème.

Nous nous intéresserons ensuite aux valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$, pour quelques fonctions arithmétiques f. Nous démontrerons en particulier:

THÉORÈME 3. *On a, pour* $n \to +\infty$:

$$\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \frac{\log n}{\log 2}(1 + o(1)) .$$

Au paragraphe IV, nous disons qu'un nombre n est ω-intéressant si:

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n} .$$

Cette définition caractérise une famille de nombres n qui ont beaucoup de facteurs premiers, en les comparant avec des nombres m plus grands que n (contrairement à la définition des nombres hautement composés). Nous donnons quelques propriétés de ces nombres.

Enfin, dans le dernier paragraphe, on dit qu'une fonction f a un point d'étranglement en n, si

$$m < n \Rightarrow f(m) < f(n) \quad \text{et} \quad m > n \Rightarrow f(m) > f(n) .$$

Interprétation géométrique: Le graphe de f, contenu dans l'angle droit de sommet $(n, f(n))$ et de côté parallèle aux axes, s'étrangle en n. Nous démontrerons:

THÉORÈME 4. *La fonction* $n \to n - \omega(n)$ *a une infinité de points d'étranglement.*

Pour démontrer ce théorème, nous construirons une infinité de points n tels qu'il existe juste avant n, une plage de nombres ayant beaucoup de facteurs premiers et juste après une plage de nombres ayant peu de facteurs premiers.

§ 1. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Minoration: D'après le théorème de Selberg, (cf. [Sel 2] et [Nic]) il existe entre $(1-2\varepsilon)\log X$ et $(1-\varepsilon)\log X$ un nombre x tel que:

$$\pi(x+f(x)) - \pi(x) \sim \frac{f(x)}{\log x} \quad \text{et} \quad \pi(x) - \pi(x-f(x)) \sim \frac{f(x)}{\log x}$$

pour toute fonction $f(x)$ croissante, vérifiant $f(x) > x^{1/6}$ et telle que $\frac{f(x)}{x}$ décroisse et tende vers 0.

On choisit $f(x) = c\sqrt{x}\log x$. Soit k tel que $p_k \leqslant x < p_{k+1}$. On considère la famille de nombres:

$$n = A_{k-r} q_1 \dots q_r, \quad 0 \leqslant r \leqslant s$$

où $q_1, \dots, q_r$ sont des nombres premiers distincts choisis parmi $p_{k+1}, \dots, p_{k+s}$.

De tels nombres vérifient $\omega(n) = k$ et il y en a 2^s. De plus ils vérifient:

$$n \leqslant A_k \left(\frac{p_{k+s}}{p_{k-s}}\right)^s .$$

On choisit s de façon que $p_{k+s} \leqslant x + f(x)$ et $p_{k-s} \geqslant x - f(x)$ de telle sorte que $s \sim \dfrac{f(x)}{\log x}$. On a alors:

$$\log \frac{n}{A_k} \leqslant s \log \frac{x+f(x)}{x-f(x)} \lesssim 2c^2 \log x .$$

Si l'on choisit $c < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, on aura donc $A_k \leqslant n < A_{k+1}$ et ces nombres n seront ω-largement composés et $\leqslant X$. On aura donc :

$$Q_l(X) \geqslant 2^s \geqslant \exp\left(\frac{(1-\varepsilon)\log 2}{\sqrt{2}}\sqrt{\log X}\right).$$

Majoration : La majoration de $Q_l(X)$ est basée sur le lemme:

LEMME 1. *Soit* $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots, p_k$ *le* $k^{\text{ième}}$ *nombre premier et soit* $T(x)$ *le nombre de solutions de l'inéquation :*

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_rp_r + \ldots \leqslant x, \quad x_i \in \{0, 1\}.$$

Si $C > \pi\sqrt{\dfrac{2}{3}}$, *on a pour* x *assez grand :*

$$\log T(x) \leqslant C\sqrt{\frac{x}{\log x}}.$$

Démonstration. Le nombre de solutions de l'équation:

$$x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_rp_r + \ldots = n, \quad x_i \in \{0, 1\}$$

est le nombre $S(n)$ de partitions de n en sommants premiers et distincts. Le nombre $T(x) = \sum_{n \leqq x} S(n)$ peut être évalué par le théorème taubérien de Hardy et Ramanujan (cf. [Ram]) et Roth et Szekeres donnent la formule [Roth]:

$$\log S(n) = \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{n}{\log n}}\left(1 + O\left(\frac{\log\log n}{\log n}\right)\right)$$

et montrent que $S(n)$ est une fonction croissante de n. On a alors: $T(x) \leqslant x\, S[x]$.

Nous nous proposons de majorer le nombre d'éléments de l'ensemble:

$$E_k = \{n \mid \omega(n) = k,\ n < A_{k+1}\}.$$

Soit $n \in E_k$, $n = q_1^{\alpha_1} \ldots q_k^{\alpha_k}$; le nombre $n' = q_1 q_2 \ldots q_k$ est sans facteur carré et $n' \in E_k$. De plus $\dfrac{n}{n'} < p_{k+1}$. On a donc:

$$\text{card } E_k \leqslant p_{k+1} \text{ card } E'_k,$$

avec: $E'_k = \{n \mid n$ sans facteur carré, $\omega(n) = k, n < A_{k+1}\}$.

Maintenant si $n \in E'_k$, n s'écrit:

$$n = 2^{1-y_k}\, 3^{1-y_{k-1}} \dots p_k^{1-y_1}\, p_{k+1}^{x_1} \dots p_{k+r}^{x_r} \dots$$

avec x_i et y_i valant 0 ou 1 et $\sum x_i = \sum y_i$. Il vient:

$$\log \frac{n}{A_k} = x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k}$$
$$+ \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots$$

Le nombre d'éléments de E'_k est donc majoré par le nombre de solutions de l'inéquation, en x_i et y_i valant 0 ou 1:

$$x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots + y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots$$
$$+ y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

On en déduit: card $E'_k \leqslant N_1 N_2$, avec N_i = nombre de solutions de l'inéquation $\xi_i\ (i=1,2)$:

$$(\xi_1) \quad x_1 \log \frac{p_{k+1}}{p_k} + \dots + x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} + \dots \leqslant \log p_{k+1}$$

$$(\xi_2) \quad y_1 \log \frac{p_k}{p_k} + \dots + y_r \log \frac{p_k}{p_{k-r+1}} + \dots \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

Soit R le plus grand nombre r tel que $p_{k+r} < 2p_k$. On coupe l'inéquation ξ_1 en deux:

$$\xi'_1: \quad \sum_{r=1}^{R} \quad x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leqslant \log p_{k+1}\,,$$

$$\xi''_1: \quad \sum_{r=R+1}^{\infty} \quad x_r \log \frac{p_{k+r}}{p_k} \leqslant \log p_{k+1}\,.$$

Le nombre de variables de ξ''_1 est en fait fini, et majoré par $p_k\, p_{k+1}$. Le nombre de variables non nulles d'une solution de ξ''_1 est majoré par $\dfrac{1}{\log 2} \log p_{k+1}$. Le nombre N''_1 de solutions de ξ''_1 est majoré par:

$$N_1'' \leqslant \sum_{j \leqslant \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}} \binom{p_k\ p_{k+1}}{j} \leqslant \frac{1}{\log 2} \log p_{k+1} \, (p_k\, p_{k+1})^{\frac{1}{\log 2} \log p_{k+1}}$$

ce qui assure:

$$N_1'' = \exp\left((O \log p_k)^2\right).$$

Il résulte de l'inégalité de Brun-Titchmarsh (cf. [Hal 1] et [Mon]):

$$\pi(x) - \pi(x-y) < 2y / \log y$$

valable pour $1 < y \leqslant x$ que, pour $k \geqslant 2$:

$$p_{k+r} - p_k > \frac{r}{2} \log(p_{k+r} - p_k) \geqslant \frac{r}{2} \log 2r .$$

On en déduit que pour $r \leqslant R$, on a:

$$\log \frac{p_{k+r}}{p_k} \geqslant \frac{p_{k+r} - p_k}{p_{k+r}} \geqslant \frac{r \log 2r}{4p_k} \geqslant c\, \frac{p_r}{p_k} .$$

Toute solution de ξ'_1 est donc solution de l'inéquation:

$$x_1 p_1 + x_2 p_2 + \ldots + x_r p_r + \ldots \leqslant \frac{1}{c}\, p_k \log p_{k+1}$$

et d'après le lemme précédent, on a:

$$\log N'_1 = O(\sqrt{p_k})$$

et le nombre de solutions de ξ_1 vérifie:

$$\log N_1 = O(\sqrt{p_k}) .$$

On démontre de même que le nombre N_2 de solutions de ξ_2 vérifie:

$$\log N_2 = O(\sqrt{p_k}) .$$

Ce qui entraine:

$$\log(\text{card } E'_k) \leqslant \log N_1 + \log N_2 = O(\sqrt{p_k})$$

et:

$$\text{card } E_k \leqslant p_{k+1} (\text{card } E'_k) = \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right).$$

Finalement, l'ensemble des nombres ω-largement composés est $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$; la quantité $Q_l(X)$ de tels nombres $\leqslant X$ vérifie, en posant $A_{k_0} \leqslant X < A_{k_0+1}$, ce qui entraine $\log X \sim p_{k_0}$:

$$Q_l(X) \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} \exp\left(O(\sqrt{p_k})\right) \leqslant k_0 \exp\left(O(\sqrt{p_{k_0}})\right) \leqslant \exp\left(c_2\sqrt{\log X}\right).$$

Remarque. On peut conjecturer que $\log Q_l(X) \sim \pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\log X}$. En effet si l'on calcule la constante c_2 dans la majoration ci-dessus, on trouve $c_2 = 2\pi\sqrt{\frac{2}{3}}(1+\varepsilon)$, le « 2 » venant de la formule de Brun-Titchmarsh. Si l'on suppose les nombres premiers très bien répartis autour de p_k, on peut assimiler $\log \frac{p_{k+r}}{p_k}$ à $r\frac{\log p_{k+1}}{p_k}$ et le nombre d'éléments de E'_k serait le nombre de solutions de l'inéquation

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x_r + \sum_{r=1}^{\infty} r y_r \leqslant p_k \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{\infty} x_i = \sum_{i=1}^{\infty} y_i$$

$x_i, y_i \in \{0, 1\}$. Le logarithme de ce nombre de solutions est équivalent à $\pi\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{p_k}$.

§ 2. Démonstration du théorème 2

Minoration : Posons $k = \left[\frac{c \log x}{\log\log x}\right] + 1$ et $A_k = e^{\theta(p_k)} = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, où $\theta(x) = \sum_{p \leq x} \log p$ est la fonction de Chebichev. Les multiples n de A_k vérifient $\omega(n) > \frac{c \log x}{\log\log x}$. Il y en a $\left[\frac{x}{A_k}\right]$ qui sont inférieurs à x. On a (cf. [Land], § 57):

$$\log A_k = \theta(p_k) = p_k + O(p_k/\log^2 p_k) = k\left(\log k + \log\log k - 1 + o(1)\right).$$

Il vient en posant $l = \log x$, $l_2 = \log\log x$, $l_3 = \log\log\log x$:

$$k = \frac{c\,l}{l_2} + O(1)$$

$$\log A_k = cl + c(\log c - 1)\left(1 + o(1)\right) l/l_2$$

et

$$f_c(x) \geqslant \left[\frac{x}{A_k}\right] \geqslant x^{1-c} \exp\left(c(1 - \log c)\left(1 + o(1)\right)\frac{\log x}{\log\log x}\right).$$

Majoration: En développant par la formule multinomiale (cf. [Com], t. 1, p. 38 ou [Hal 2], p. 147), on obtient:

$$\left(\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\right)^k \geqslant k!\sum_{2\leq p_{i_1}<\cdots<p_{i_k}\leq x}\frac{1}{p_{i_1}p_{i_2}\cdots p_{i_k}}$$

On a donc, pour $k\in\mathbf{N}$, en désignant par S l'ensemble des nombres sans facteur carrés,

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leq x,\ n\in S\\ \omega(n)=k}}1\leqslant\sum_{\substack{n\leq x,\ n\in S\\ \omega(n)=k}}\frac{1}{n}\leqslant\frac{1}{k!}\left(\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\right)^k.$$

Evaluons maintenant le nombre d'entiers $n\leqslant x$ dont les facteurs premiers sont exactement $p_{i_1}, p_{i_2}, \ldots, p_{i_k}$. On doit avoir

$$n = p_{i_1}^{\alpha_1}p_{i_2}^{\alpha_2}\ldots p_{i_k}^{\alpha_k}\leqslant x\,;\qquad \alpha_j\geqslant 1\,.$$

Ce qui entraîne

$$\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_k\leqslant\left[\frac{\log x}{\log 2}\right];\qquad \alpha_j\geqslant 1\,.$$

Or le nombre de solutions de cette inéquation est un nombre de combinaisons avec répétition et vaut $\binom{[\log x\ /\ \log 2]}{k}\leqslant\frac{1}{k!}\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^k$.

On a donc

$$\frac{1}{x}\sum_{\substack{n\leq x\\ \omega(n)=k}}1\leqslant\frac{1}{(k!)^2}\left(\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\right)^k\left(\frac{\log x}{\log 2}\right)^k$$

et

$$\sum_{\substack{n\leq x\\ \omega(n)\geq k}}1\leqslant x\sum_{j\geq k}\frac{\left(\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\right)^j(\log x/\log 2)^j}{(j!)^2}$$

On utilise la majoration $\sum_{j\geq k}\frac{a^j}{(j!)^2}\leqslant\frac{a^k}{(k!)^2}\frac{1}{1-a/(k+1)^2}$ valable pour $a<(k+1)^2$. On sait d'autre part (cf. [Land] § 28) qu'il existe B tel que $\sum_{p\leq x}\frac{1}{p}\leqslant\log\log x+B$, et on choisit:

$$k=\left[\frac{c\log x}{\log\log x}\right]+1\,.$$

On obtient alors

$$f_c(x) \leqslant \frac{x\,(l_2+B)^k\,(l/\log 2)^k}{(k!)^2}\left(1+O\left(\frac{l_2^3}{l}\right)\right)$$

et en remplaçant $\log k!$ par $k \log k + O(k)$, on obtient

$$f_c(x) \leqslant x^{1-c} \exp\left(3c\,(1+o(1))\,\frac{\log x \log\log\log x}{\log\log x}\right),$$

ce qui achève la démonstration du théorème 2.

§ 3. Valeurs extrêmes de $f(n) + f(n+1)$

1) *Fonction* $\sigma(n)$ = *somme des diviseurs de* n.

On remarque d'abord que, lorsque $n \to +\infty$,

$$(2) \qquad \begin{aligned}\sigma(n) &= n \prod_{p^a \,||\, n}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right)\\ &= n\,(1+o(1)) \prod_{\substack{p^a \,||\, n\\ p \leq \log n}}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right)\end{aligned}$$

autrement dit, les facteurs premiers supérieurs à $\log n$ ne modifient guère $\sigma(n)$. De tels facteurs, il y en a au plus $\log n / \log\log n$ et:

$$\prod_{\substack{p^a \,||\, n\\ p > \log n}}\left(1+\frac{1}{p}+\ldots+\frac{1}{p^a}\right) \leqslant \prod_{\substack{p^a \,||\, n\\ p > \log n}} \frac{1}{1-1/p} \leqslant \left(1-\frac{1}{\log n}\right)^{-\frac{\log n}{\log\log n}}$$

$$= 1 + \frac{O(1)}{\log\log n}$$

ce qui démontre (2).

Ensuite, on a pour tout n, $\sigma(n) \geqslant n$ et pour n pair, $\sigma(n) \geqslant \frac{3}{2} n$. On a donc pour tout n: $\sigma(n) + \sigma(n+1) \geqslant \frac{5}{2} n$. Inversement, pour k fixé, le nombre $n = 4p_2 p_3 \ldots p_k + 1$ est tel que n et $n+1$ n'ont pas (à part 2) de facteurs premiers inférieurs à $(1-\varepsilon) \log n$ et donc vérifie: $\sigma(n) + \sigma(n+1) = \frac{5}{2} n\,(1+o(1))$.

On obtient les grandes valeurs de $\sigma(n) + \sigma(n+1)$ de la façon suivante: Il résulte de (2) que

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leqslant n\bigl(1+o(1)\bigr)\ (P_1+P_2)$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p} \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p \mid n+1 \\ p \leq \log n}} \frac{1}{1-1/p}.$$

Comme P_1 et P_2 sont supérieurs à 1, $P_1 + P_2 \leqslant P_1 P_2 + 1$ et

$$P_1 P_2 \leqslant \prod_{p \leq \log n} \frac{1}{1-1/p} \sim e^{\gamma} \log\log n\,,$$

où γ est la constante d'Euler d'après la formule de Mertens (cf. [Wri] § 22.8). Cela donne pour tout n

$$\sigma(n) + \sigma(n+1) \leqslant n\bigl(1+o(1)\bigr) e^{\gamma} \log\log n\,.$$

Ce résultat est le meilleur possible puisque pour une infinité de n, on a (cf. [Wri] § 22.9):

$$\sigma(n) \sim n\, e^{\gamma} \log\log n\,.$$

Pour que la majoration $P_1 + P_2 \leqslant P_1 P_2 + 1$ soit bonne, il faut choisir P_1 ou P_2 voisin de 1. L'examen des tables de $\max_{n \leq x} \sigma(n)$ et de

$$\max_{n \leq x} \bigl(\sigma(n) + \sigma(n-1)\bigr)$$

montre que souvent un nombre N hautement abondant (c'est-à-dire vérifiant $n < N \Rightarrow \sigma(n) < \sigma(N)$) vérifie: $\max_{n \leq N+1} \bigl(\sigma(n) + \sigma(n-1)\bigr) = \sigma(N) + \sigma(N-1)$ ou $\sigma(N+1) + \sigma(N)$.

2) *Indicateur d'Euler* ϕ .

On a une relation analogue à (2):

$$\phi(n) = n \prod_{p \mid n} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n\bigl(1+o(1)\bigr) \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq \log n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

On démontre comme précédemment que pour tout $n > 1$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \leqslant \frac{3}{2}\, n$$

et que, pour une infinité de n

$$\phi(n) + \phi(n+1) \sim \frac{3}{2} n .$$

Pour les petites valeurs de $\phi(n) + \phi(n+1)$, on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geqslant n(1+o(1))(P_1+P_2) \geqslant 2n(1+o(1))\sqrt{P_1 P_2},$$

avec

$$P_1 = \prod_{\substack{p \mid n \\ p \leq \log n}} \left(1-\frac{1}{p}\right) \quad \text{et} \quad P_2 = \prod_{\substack{p \mid n+1 \\ p \leq \log n}} \left(1-\frac{1}{p}\right),$$

et comme

$$P_1 P_2 \geqslant \prod_{p \leq \log n} (1-1/p) \sim \frac{e^{-\gamma}}{\log \log n},$$

on a

$$\phi(n) + \phi(n+1) \geqslant \frac{2e^{-\gamma/2} n(1+o(1))}{\sqrt{\log \log n}} .$$

Cette inégalité est une égalité pour les n construits de la façon suivante: Soit $k \in \mathbf{N}^*$. On pose $P_k = \prod_{p \leq p_k} (1-1/p)$. Soit k' le plus grand entier tel que $P_{k'} \geqslant \sqrt{P_k}$; on pose alors $R = p_1 p_2 \dots p_{k'}$; $S = p_{k'+1} \dots p_k$; on a $\dfrac{\phi(R)}{R} = \dfrac{\phi(S)}{S}(1+o(1))$ et l'on prend pour n la plus petite solution des congruences: $n \equiv 0 \bmod R$; $n+1 \equiv 0 \bmod S$. Cette solution vérifie $R \leqslant n < RS = \exp(\theta(p_k))$, ce qui montre que n tend vers l'infini avec k,

$$\text{et } \frac{\phi(n)}{n} \leqslant \frac{\phi(R)}{R} \text{ et } \frac{\phi(n+1)}{n+1} \leqslant \frac{\phi(S)}{S} .$$

3) *Fonction Ω: Démonstration du théorème 3.*

PROPOSITION 1. *Soit $\varepsilon > 0$ et $k > 0$. On écrit $n(n+1) = U_k V_k$ où U_k est le produit des facteurs premiers $\leqslant k$. Alors il existe $n_0(k, \varepsilon)$ tel que pour $n \geqslant n_0$, on ait $U_k \leqslant n^{1+\varepsilon}$.*

Le théorème 3 résulte de cette proposition puisque pour $k \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}\Omega(n) + \Omega(n+1) &= \Omega(n(n+1)) = \Omega(U_k) + \Omega(V_k) \\ &\leqslant \frac{\log U_k}{\log 2} + \frac{\log V_k}{\log k} \\ &\leqslant (1+\varepsilon)\frac{\log n}{\log 2} + \frac{2\log n}{\log k}, \qquad \text{pour } n \geqslant n_0 .\end{aligned}$$

Etant donné η, il suffit donc de choisir ε assez petit et k assez grand pour obtenir: $\Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant \dfrac{\log n}{\log 2}(1+\eta)$ pour $n \geqslant n_0$.

La proposition 1 résulte de la proposition 2 (cf. [Rid] et [Sch], th 4F), comme nous l'a précisé M. Langevin:

PROPOSITION 2 (Ridout). *Soit* θ *un nombre algébrique* $\neq 0$. *Soit* $P_1, P_2, \ldots, P_s, Q_1, Q_2, \ldots, Q_t$ *des nombres premiers distincts, et* $\delta > 0$. *Il y a un nombre fini de nombres rationnels* a/b *avec :*

$$a = a' P_1^{\alpha_1} P_2^{\alpha_2} \ldots P_s^{\alpha_s} \qquad \text{et} \qquad b = b' Q_1^{\beta_1} Q_2^{\beta_2} \ldots Q_t^{\beta_t}$$

avec : $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_s, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_t \in \mathbf{N}$ *et* $a', b' \in \mathbf{N}^*$ *tels que*

$$\left| \theta - \frac{a}{b} \right| < \frac{1}{|a'b'|\,|ab|^{\delta}} .$$

Démonstration de la proposition 1. Supposons que pour une infinité de n, on ait $U_k > n^{1+\varepsilon}$. On peut partager les nombres premiers $\leqslant k$ en deux parties $P_1, P_2, \ldots P_s$ et $Q_1, Q_2, \ldots Q_t$, de telle sorte qu'il y ait une infinité de n tels que $U_k > n^{1+\varepsilon}$ et tels que

$$p \leqslant k \quad \text{et} \quad p \mid n \Rightarrow p \in \{P_1, \ldots, P_s\},$$

$$p \leqslant k \quad \text{et} \quad p \mid n+1 \Rightarrow p \in \{Q_1, \ldots, Q_t\}.$$

On écrit $n = n' P_1^{\alpha_1} \ldots P_s^{\alpha_s}$ et $(n+1) = n'' Q_1^{\beta_1} \ldots Q_t^{\beta_t}$ et l'on choisit $\theta = 1$, $\delta = \varepsilon/3$. Il y aurait alors une infinité de nombres rationnels $\dfrac{n+1}{n}$, solution de

$$\left| 1 - \frac{n+1}{n} \right| < \frac{1}{|n'n''|\,(n(n+1))^{\delta}}$$

puisque $n'n'' = V_k \leqslant n^{1-\varepsilon} + n^{-\varepsilon}$, ce qui contredirait la proposition 2.

Les valeurs de $n \leqslant 300\,000$ vérifiant

$$m < n \Rightarrow \Omega\big(m\,(m+1)\big) < \Omega\big(n\,(n+1)\big)$$

sont (avec, entre parenthèses la valeur de $\Omega\big(n\,(n+1)\big)$): 2 (2); 3 (3); 7 (4); 8 (5); 15 (6); 32 (7); 63 (9); 224 (10); 255 (11); 512 (13); 3968 (14); 4095 (17); 14436 (18); 32768 (19); 65535 (20); 180224 (22); 262143 (24).

On constate que les nombres $2^n + \{-1, 0, +1\}$, lorsque n a de nombreux facteurs premiers, figurent en bonne place dans cette table. Malheureusement, la proposition 2 n'est pas effective, et il n'est pas possible de montrer par cette méthode que la table en contient une infinité.

4) *Fonction* ω.

Nous avons rappelé dans l'introduction que pour tout n, on a

$$\omega(n) \leqslant \frac{\log n}{\log\log n}\big(1 + o(1)\big)\,.$$

Soit $l = \overline{\lim}\ \dfrac{\omega(n) + \omega(n+1)}{\log n\,/\log\log n}$.

On a $1 \leqslant l \leqslant 2$ de façon évidente. On a probablement $l = 1$, mais il semble impossible de le démontrer.

La suite des nombres n tels que $m < n \Rightarrow \omega\big(m\,(m+1)\big) < \omega\big(n\,(n+1)\big)$ est: 1, 2, 5, 14, 65, 209, 714, 7314, 28570, 254540, etc ... On a en particulier $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ et $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. L'équation

$$n\,(n+1) = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots\, p_k$$

a-t-elle des solutions > 714? (cf. [Nel]).

Pour les petites valeurs de $\omega(n) + \omega(n+1)$, le résultat de Chen (pour une infinité de nombres premiers p, on a $\Omega(2p+1) \leqslant 2$, cf. [Hal 1], chap 11) montre que pour une infinité de n, on a

$$\omega(n) + \omega(n+1) \leqslant \Omega(n) + \Omega(n+1) \leqslant 4\,.$$

L'ultime amélioration du résultat de Chen $\big(\Omega(2p+1) = 1\big)$ permettrait de remplacer 4 par 3 qui est le meilleur résultat possible pour Ω.

Si l'on a $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$, n et $n+1$ doivent être des puissances de nombres premiers. L'un des deux étant pair, doit donc être une puissance de 2. Cette situation se produira en particulier si n est un nombre premier de Mersenne ($n = 2^p - 1$ avec p premier) ou si $n + 1$ est un nombre premier de Fermat ($n+1 = 2^{2^k}+1$). D'autre part l'équation $2^n \pm 1 = p^a$

avec $a \geqslant 2$ qui est un cas particulier de l'équation de Catalan, n'admet qu'un nombre fini de solutions (cf. [Tij]).

L'existence d'une infinité d'entiers n tels que $\omega(n) + \omega(n+1) = 2$ est donc équivalente à l'existence d'une infinité de nombres premiers de Mersenne ou de Fermat.

§ 4. Nombres ω-intéressants

Définition. On dit que n est ω-intéressant, si l'on a

$$m > n \Rightarrow \frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n)}{n}.$$

Interprétation géométrique: pour $m > n$, le point $(m, \omega(m))$ est situé sous la droite joignant l'origine à $(n, \omega(n))$.

Propriété 1 : Pour $k \geqslant 1$, le nombre $A_k = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ est ω-intéressant. En effet: si $\omega(m) \leqslant k$ on a bien: $\omega(m)/m < \omega(A_k)/A_k$ pour $m > A_k$. Et si $\omega(m) = k + \Delta, \Delta > 0$, on a alors $m \geqslant A_k 3^\Delta$ et:

$$\frac{\omega(m)}{m} \leqslant \frac{k+\Delta}{A_k 3^\Delta} = \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{\left(1+\frac{\Delta}{k}\right)}{3^\Delta} \leqslant \frac{\omega(A_k)}{A_k} \frac{1+\Delta}{3^\Delta} < \frac{\omega(A_k)}{A_k}.$$

Propriété 2: Soit n vérifiant :

$$A_k < n < A_{k+1}\left(1-\frac{1}{k}\right) \quad \text{et} \quad \omega(n) = k$$

alors n est ω-intéressant.

Démonstration : Soit $m > n$, ou bien on a: $m \geqslant A_{k+1}$ et d'après la propriété 1:

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(A_{k+1})}{A_{k+1}} \leqslant \frac{(k+1)\left(1-\frac{1}{k}\right)}{n} < \frac{\omega(n)}{n}$$

ou bien on a: $n < m < A_{k+1}$ et cela entraine $\omega(m)/m < k/n = \omega(n)/n$.

Propriété 3 : Pour une infinité de valeurs de k, il existe un nombre ω-intéressant, plus grand que A_k et ayant $k-1$ facteurs premiers.

Démonstration : Soit k tel que

$$\frac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \frac{1}{k-1} ; \tag{3}$$

alors $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_{k-1} (p_k + 1)$ est ω-intéressant:

Remarquons d'abord que l'on a $A_k < n < n' = A_k \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$ et que pour $k \geqslant 2$, d'après la propriété 2, n' est ω-intéressant. Ensuite, $\omega(n) = k - 1$; si m vérifie $n < m < n'$ on a: $\omega(m) \leqslant k - 1$; si m vérifie $n' \leqslant m$, on a

$$\frac{\omega(m)}{m} < \frac{\omega(n')}{n'} = \frac{k}{n'} < \frac{k-1}{n} ;$$

d'après l'hypothèse.

On sait qu'il existe une infinité de nombres premiers tels que $p_{k+1} - p_k > 2 \log p_k$ (cf. [Pra], p. 157). Pour ces nombres on aura

$$\frac{p_{k+1}}{p_k+1} > 1 + \frac{2 \log p_k - 1}{p_k + 1}$$

et comme $p_k \sim k \log k$, cela entraine la relation (3).

Remarque 1. Si k vérifie $p_{k+1} - p_k < \dfrac{p_k}{k-1}$ il est facile de voir qu'il n'existe aucun nombre ω-intéressant compris entre A_k et $n' = A_k \dfrac{p_{k+1}}{p_k}$.

Cette situation se produit pour une infinité de k. On peut donc conjecturer que pour une infinité de k, les nombres ω-intéressants compris entre A_k et A_{k+1} vérifient $\omega(n) \geqslant k$.

Remarque 2. Désignons par n'' le plus petit entier suivant A_k et ayant $(k-1)$ facteurs premiers. On a $n'' \leqslant n = A_k\left(1 + \dfrac{1}{p_k}\right)$. Il est possible d'obtenir une meilleure majoration de n'' de la façon suivante: Le théorème de Sylvester-Schur affirme que $P(u, r)$, le plus grand facteur premier du produit $(u+1) \ldots (u+r)$ est plus grand que r si $u \geqslant r$. (cf. [Lan]).

Considérons le produit: $\displaystyle\prod_{t=1}^{p_{k-2}} (p_{k-1} p_k + t)$. Il doit avoir un facteur premier $q > p_{k-2}$, et soit $t = t_q$ tel que q divise $p_{k-1} p_k + t$. Alors le nombre $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_{k-2} (p_{k-1} p_k + t_q)$ a $k - 1$ facteurs premiers et l'on a $n \leqslant A_k (1 + p_{k-2}/p_k p_{k-1})$. Le résultat de Ramachandra (cf. [Ramac]):

si $r^{3/2} \leqslant u \leqslant r^{\log \log r}$, on a: $P(u, r) > r^{1+2\lambda}$ avec $\lambda = -\left(8 + \frac{\log u}{\log r}\right)$ permet de montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $n'' \leqslant A_k \left(1 + \frac{1}{p_k^{1+\alpha}}\right)$. On peut prendre $\alpha = 0,000974$.

Propriété 4. Soit n un nombre ω-intéressant, $n \geqslant (k-1) A_k$ alors $\omega(n) \geqslant k$. Cela entraine qu'un nombre ω-intéressant compris entre A_k et A_{k+1} a plus de $(k-1)$ facteurs premiers.

Démonstration. Soit $n \geqslant (k-1) A_k$ vérifiant $\omega(n) \leqslant k-1$; on écrit

$$A_k (t-1) \leqslant n < A_k t, \quad t \text{ entier.}$$

On a donc $t \geqslant k$. Ce nombre n ne peut pas être ω-intéressant puisque

$$\frac{\omega(n)}{n} \leqslant \frac{k-1}{A_k(t-1)} \leqslant \frac{k}{A_k t} \leqslant \frac{\omega(A_k t)}{A_k t}.$$

Conjecture: Peut-on remplacer $n \geqslant (k-1) A_k$ par $n \geqslant (1+\varepsilon(k)) A_k$ avec $\lim_{k \to +\infty} \varepsilon(k) = 0$?

Finalement, on voit que l'ensemble des nombres ω-intéressants coïncide presque avec l'ensemble des nombres ω-largement composés: Les deux ensembles ont une infinité de points communs, mais il existe une infinité de nombres ω-largement composés non ω-intéressants (exemple: $n = (p_{k+1} - 1) A_k$ par la propriété 2) et la propriété 3 fournit un exemple de la situation inverse.

§ 5. Démonstration du théorème 4

Proposition 3. *Posons $N_k(x) = \text{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) > k\}$. Pour α fixé, $\alpha > 1$, on a lorsque $x \to +\infty$ (avec les notations de l'introduction)*

$$N_{[\alpha \log \log x]}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1} \alpha^{\frac{1}{2} + \{\alpha \log \log x\}} \frac{x(1 + O(1/\log \log x))}{(\log x)^{1-\alpha+\alpha \log \alpha} \sqrt{\log \log x}}$$

où $\{y\}$ désigne la partie fractionnaire de y.

Pour $0 < \alpha < 1$, la formule ci-dessus est valable $\left(\text{en remplaçant } \frac{F(\alpha)}{\alpha - 1}\right.$ par $\left.\frac{F(\alpha)}{1-\alpha}\right)$ pour estimer $\text{card}\{n \leqslant x \mid \omega(n) \leqslant \alpha \log \log x\}$.

Démonstration (communiquée par H. Delange). Soit $P_x(z) = \sum_{n \leq x} z^{\omega(n)}$. Le théorème des résidus montre que:

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{P_x(z)}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz$$

où γ est un cercle de centre 0 et de rayon $r > 1$. On applique la formule de Selberg (1)

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{z\, F(z)\, x\, (\log x)^{z-1}}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz + R_1(x),$$

avec

$$R_1(x) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{O\big(x\,(\log x)^{\mathrm{Re}\, z-2}\big)}{(z-1)\, z^{k+1}}\, dz = O\left(\frac{x\,(\log x)^{r-2}}{(r-1)\, r^k}\right)$$

On pose $\dfrac{z\,F(z)}{z-1} = G(z)$. G est holomorphe en $z = r$ et l'on écrit

$$G(z) = G(r) + (z-r)\, G'(r) + (z-r)^2 H(z,r),$$

avec $H(r,r) = \dfrac{1}{2}\, G''(r)$. Par la formule de Taylor, il existe λ, $0 < \lambda < 1$ tel que $H(z,r) = \dfrac{1}{2}\, G''\big(\lambda z + (1-\lambda) r\big)$. La fonction H est donc continue et $H(z,r)$ est bornée uniformément pour $z \in \gamma$, $1 < r_1 \leqslant r \leqslant r_2$. On pose $\log\log x = l$. On obtient

$$N_k(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_\gamma \frac{x\, G(z) e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz + R_1(x)$$

$$= \frac{1}{2i\pi \log x}\left(\int_\gamma \frac{x\, G(r)\, e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz + \int_\gamma \frac{x\,(z-r)\, e^{zl} G'(r)}{z^{k+1}}\, dz\right) + R_1(x) + R_2(x)$$

$$= \frac{x}{\log x}\, G(r)\, \frac{l^k}{k!} + \frac{x}{\log x}\, G'(r)\left(\frac{l^{k-1}}{(k-1)!} - \frac{r\, l^k}{k!}\right) + R_1(x) + R_2(x).$$

On choisit $r = \dfrac{k}{l}$ de telle sorte que le coefficient de $G'(r)$ s'annule, et on a

$$R_2(x) = \frac{1}{2i\pi \log x} \int_\gamma \frac{x\,(z-r)^2\, H(z,r)\, e^{zl}}{z^{k+1}}\, dz .$$

Si l'on pose $z = r\, e^{i\theta}$, on a $|z-r|^2\, |e^{zl}| = 2r^2 (1 - \cos\theta)\, e^{rl\cos\theta}$.

On peut montrer que, lorsque $\alpha \to +\infty$, on a $\int_0^{2\pi} (1-\cos\theta)\, e^{\alpha\cos\theta}\, d\theta = O(e^{\alpha}\alpha^{-3/2})$ (cf. par exemple, [Dieu], ch. IV). On en déduit que

$$R_2(x) = O\left(\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{rl}}{l^{3/2}\,r^{k-1/2}}\right)$$

et finalement

$$N_k(x) = \frac{x}{\log x}\,G(r)\,\frac{l^k}{k!} + O\left(\frac{x}{\log x}\,\frac{e^{rl}}{l^{3/2}\,r^{k-1/2}}\right) + O\left(\frac{x\,(\log x)^{r-2}}{(r-1)\,r^k}\right)$$

On pose $k = [\alpha \log\log x]$, $r = \dfrac{k}{l} = \alpha + O\left(\dfrac{1}{\log\log x}\right)$, on a donc $G(r) = G(\alpha)\left(1 + O\left(\dfrac{1}{l}\right)\right)$, on évalue chacun des termes ci-dessus (en particulier $k!$ par la formule de Stirling: $k! \sim k^k e^{-k}\sqrt{2\pi k}$) et on obtient la proposition 3.

Lorsque $0 < \alpha < 1$, on suit la même méthode, en intégrant sur un cercle de rayon $r = \dfrac{k}{l} < 1$.

Proposition 4. *Soit* $(n_0, A) = 1$, *et* $\alpha > 0$. *Alors on a, avec* $d(n) = \sum_{d \mid n} 1$,

(i) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} d(n) \leqslant \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x},$$

(ii) $$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x \\ \omega(n) \geq \alpha \log\log x}} 1 \leqslant \frac{1}{(\log x)^{\alpha\log 2}}\left(\frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right) + 2\sqrt{x}\right)$$

En particulier cette dernière somme est $O\left(\dfrac{x}{A}\,\dfrac{1}{(\log x)^{\alpha\log 2 - 1}}\right)$ *lorsque* $A = O(\sqrt{x})$.

Démonstration. La formule (ii) est une conséquence immédiate de (i): Les nombres pour lesquels $\omega(n) \geqslant \alpha \log\log x$ vérifient $d(n) \geqslant 2^{\omega(n)}$ soit $d(n) \geqslant (\log x)^{\alpha\log 2}$.

On a

$$\sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} d(n) \leqslant \sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ n \leq x}} \ \sum_{\substack{d \leq \sqrt{n} \\ d \mid n}} 2 \leqslant \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2 \sum_{\substack{n \equiv n_0 \bmod A \\ d \mid n \\ n \leq x}} 1 .$$

Or les nombres n sur lesquels s'effectue cette dernière sommation vérifient $n = n_0 + yA \equiv 0 \bmod d$. Si $(A, d) = 1$, cette congruence a une solution et une seule en y dans chaque intervalle de longueur d. Si $(A, d) \neq 1$, pour que cette congruence ait une solution, on doit avoir $(A, d) \mid n_0$, d'où $(A, n_0) \neq 1$; il n'y a donc pas de solutions. Finalement, il y a au plus une solution dans chaque intervalle de longueur d et la somme est

$$\leqslant \sum_{d \leq \sqrt{x}} 2\left(\frac{x}{Ad} + 1\right) \leqslant 2\sqrt{x} + \frac{2x}{A}\left(1 + \frac{1}{2}\log x\right).$$

Remarque. Dans le cas $A = 1, \alpha = 2$, on trouve dans l'estimation (ii) le même exposant pour $\log x$ que dans la proposition 3. Ceci est à rapprocher du fait que (cf. [And])

$$\sum_{n \leq x;\ \omega(n) \sim 2 \log\log x} d(n) \sim x \log x .$$

Par des méthodes plus compliquées, il est possible d'obtenir pour (ii) une meilleure majoration.

LEMME 2. *Soit* $M = (a_{ij})$ *une matrice à* m *lignes et* n *colonnes à coefficients dans un corps* K. *Soit* $\mathscr{P}$ *une partie de* K *et soit* L_i *le nombre d'éléments de la* $i^{\text{ème}}$ *ligne de* M *qui sont dans* $\mathscr{P}$. *Alors il y a au moins* $n - \sum_{i=1}^{m} L_i$ *colonnes de* M *dont tous les éléments sont dans* $K - \mathscr{P}$.

Démonstration. Soit C_j le nombre d'éléments de la $j^{\text{ème}}$ colonne qui sont dans $\mathscr{P}$. On a

$$\sum_{j=1}^{n} C_j = \sum_{i=1}^{m} L_i \quad \text{et} \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j = 0}} 1 = n - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ C_j \neq 0}} 1 \geqslant n - \sum_{j=1}^{n} C_j$$
$$= n - \sum_{i=1}^{m} L_i .$$

PROPOSITION 5. *Supposons que pour* n *assez grand, il existe* $k > 0$ *et* $j < n$ *tel que*

i) $k \leqslant \omega(n)$,

ii) $\omega(n) \leqslant j$,

iii) $\omega(n-r) \geqslant j$ pour $r = 1, 2, \ldots, j-1$,

iv) $\omega(n+s) \leqslant k$ pour $s = 1, 2, \ldots, [2 \log n]$.

Alors n *est un point d'étranglement pour la fonction* $n \mapsto n - \omega(n)$.

Démonstration. Soit $m < n$.

Ou bien on a $m \leqslant n - j$ et d'après ii), $m - \omega(m) < n - j \leqslant n - \omega(n)$, ou bien on a $n = m + r$ avec $1 \leqslant r \leqslant j - 1$ et iii) et ii) donnent

$$m - \omega(m) \leqslant m - j \leqslant m - \omega(n) < n - \omega(n)\,.$$

Soit maintenant $m > n$.
Ou bien on a $m > n + 2 \log n$ et en remarquant que pour tout entier m, on a $\omega(m) \leqslant \dfrac{\log m}{\log 2} \leqslant \dfrac{3}{2} \log m$, on obtient, pour n assez grand :

$$\begin{aligned} m - \omega(m) \geqslant m - \frac{3}{2} \log m &> n + 2 \log n - \frac{3}{2} \log (n + 2 \log n) \\ &> n > n - \omega(n)\,, \end{aligned}$$

par la croissance de la fonction $x \mapsto x - \dfrac{3}{2} \log x$.
Ou bien on a $m \leqslant n + [2 \log n]$ et iv) donne alors

$$\omega(m) \leqslant k \leqslant \omega(n)$$

ce qui entraîne

$$m - \omega(m) > n - \omega(n)\,.$$

Démonstration du théorème 4. La méthode suivante est celle de [Erd 2]. Pour assurer les hypothèses i) et iii) de la proposition 5, on va demander à n d'être solution du système de congruences

$$\begin{cases} n \equiv 0 & \mod B_0 \\ n \equiv 1 & \mod B_1 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ n \equiv j-1 & \mod B_{j-1} \end{cases}$$

où B_0 est un produit de k nombres premiers et $B_1, \ldots, B_{j-1}$ des produits de j nombres premiers. On pose

$$A = \prod_{i=0}^{j-1} B_i\,.$$

D'après le théorème chinois, les solutions de ce système de congruences sont de la forme

$$n = n_0 + yA \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant n_0 < A \quad \text{et} \quad y \in \mathbf{N} .$$

On se donne x assez grand. On choisit

$$k = [3 \log \log x], \quad j = [6 \log \log x] .$$

On prend les facteurs premiers de $B_0, \ldots, B_{j-1}$ distincts et compris entre $3 \log x$ et $4 \log x$, ce qui est possible d'après le théorème des nombres premiers. On a donc:

$$\log A \leqslant 6 (\log \log x)^2 \log (4 \log x) = O (\log \log x)^3 .$$

Maintenant, pour $1 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, grâce au choix des facteurs premiers de A on a, pour la solution n_0 des congruences

$$(n_0 + s, A) = 1$$

et

$$(n_0, A) = B_0 .$$

Considérons le tableau $(a_{s,y})$, $0 \leqslant s \leqslant 2 \log x$, $0 \leqslant y \leqslant \dfrac{x}{A} - 1$ défini par

$$\begin{aligned} a_{s,y} &= \omega (n_0 + s + yA) && \text{si} \quad s \neq 0 , \\ &= \omega \left(\frac{n_0 + yA}{B_0} \right) && \text{si} \quad s = 0 . \end{aligned}$$

D'après la proposition 4, la $s^{\text{ième}}$ ligne de ce tableau contient au plus

$$O \left(\frac{x}{A} \frac{1}{(\log x)^{3 \log 2 - 1}} \right)$$

termes supérieures à $3 \log \log x$. D'après le lemme 2, il y a $\dfrac{x}{A} (1 + o(1))$ colonnes y pour lesquelles

$$\begin{aligned} &\omega (n_0 + s + yA) \leqslant 3 \log \log x && \text{pour} \quad s = 1, \ldots, 2 [\log x] , \\ &\omega (n_0 + yA) \leqslant 6 \log \log x && \text{pour} \quad s = 0 . \end{aligned}$$

Pour une de ces valeurs de y, $n = n_0 + yA$ vérifie les 4 hypothèses de la proposition 5 et est donc un point d'étranglement de la fonction $n \mapsto n - \omega (n)$.

On peut raisonnablement conjecturer que pour ε assez petit, la fonction $n \mapsto n - d(n)^\varepsilon$ a une infinité de points d'étranglement, mais il semble peu vraisemblable que ce soit encore vrai pour $\varepsilon = 1$. D'après le théorème des nombres premiers, on peut voir que pour $n = 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$, $n - (\omega(n) \log n)^{\omega(n)}$ est négatif, et donc cette fonction n'a qu'un nombre fini de points d'étranglement. On ne peut pas démontrer que $n - \omega(n)^{\omega(n)}$ n'a pas de points d'étranglement: La raison en est qu'il n'y a pas de résultats non triviaux pour la question suivante: Quel est le plus petit t_k tel que $\omega(n+t_k) \geqslant k$. On a évidemment $t_k \leqslant 2 \cdot 3 \cdot \ldots p_k$ et malheureusement, nous ne pouvons améliorer ce résultat. C'est une question beaucoup plus importante que l'étude de $n - \omega(n)^{\omega(n)}$.

Il n'est pas difficile de montrer que si n est un point d'étranglement pour la fonction $n - \omega(n)^{\omega(n)}$, alors $\omega(n) < (\log n)^{1/2+\varepsilon}$. Il semble vraisemblable que pour $n > n_0$, il existe $m > n$ avec $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n$ et même, $m - \omega(m)^{\omega(m)} < n - e^{(\log n)^{1-\varepsilon}}$, ce qui montrerait que le nombre de points d'étranglement est fini. Peut-être, pour tout $n > n_0$, existe-t-il un $m > n$ tel que $m - d(m) < n - 2$. On a besoin de $n - 2$, parce que $\min\limits_{m=n+1,n+2} m - d(m) \leqslant n - 2$, mais on ne sait rien à ce sujet.

Enfin, il est facile de voir que toute fonction additive qui possède une infinité de points d'étranglement est croissante, et donc (cf. [Erd 3] et [Pis]) proportionnelle au logarithme: La démonstration suivante a été proposée par D. Bernardi et W. Narkiewicz.

Soit f additive ayant une suite infinie $n_1 < n_2 < \ldots n_k < \ldots$ de points d'étranglement et $a < b$. On peut trouver, pour n_k assez grand, dans l'intervalle $\left(\frac{n_k}{b}, \frac{n_k}{a}\right)$ un nombre c, premier à $a\,b$; on aura alors

$$c\,a < n_k < c\,b\,,$$

ce qui entraîne

$$f(c) + f(a) < f(n_k) < f(c) + f(b)$$

et $f(a) < f(b)$.

RÉFÉRENCES

[And] ANDERSON, I. On primitive sequences. *J. London Math. Soc. 42* (1967), 137-148.

[Com] COMTET, L. *Analyse combinatoire.* Collection Sup, Presses Universitaires de France, 1970.

[Del 1] DELANGE, H. Sur des formules dues à A. Selberg. *Bull. Sci. Math. 83* (1959), 101-111.

[Del 2] DELANGE, H. Sur des formules de A. Selberg. *Acta Arithmetica 19* (1971), 105-146.

[Dieu] DIEUDONNÉ, J. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1968. collection Méthodes.

[Erd 1] ERDÖS, P. On the integers having exactly k prime factors. *Ann. of Math. (2) 49* (1948), 53-66.

[Erd 2] —— On arithmetical properties of Lambert series. *Journal Indian Math. Soc. 12* (1948), 63-66.

[Erd 3] —— On the distribution function of additive functions. *Ann. of Math. (2) 47* (1946), 1-20.

[Hal 1] HALBERSTAM, H. and H. E. RICHERT. *Sieve Methods*. Academic Press, 1974.

[Hal 2] HALBERSTAM, H. and K. F. ROTH. *Sequences*. Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[Har] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. The normal number of prime factors of a number n. *Quart. J. of Math. 48* (1917), 76-92 et *Collected papers of Ramanujan*, 262-275.

[Kac] ERDÖS, P. and M. KAC. On the Gaussian law of errors in the theory of additive functions. *Proc. Nat. Acad. Sci. 25* (1939), 206-207.
The Gaussian law of errors in the theory of additive number theoretic functions. *Amer. J. Math. 62* (1940), 738-742.

[Kol] KOLESNIK, G. and E. G. STRAUS. On the distribution of integers with a given number of prime factors *(à paraître)*.

[Land] LANDAU, E. *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*. Chelsea Publishing Company, 1953.

[Lan] LANGEVIN, M. Sur la fonction plus grand facteur premier. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou, Paris.* 16e année 1974-1975, 29 p.

[Mon] MONTGOMERY, H. L. and R. C. VAUGHAN. On the large sieve. *Mathematika 20* (1973), 119-134.

[Nel] NELSON, C., D. E. PENNEY and C. POMERANCE. 714 and 715. *J. Recreational Mathematics, vol. 7, No. 2*, Spring 1974.

[Nic] NICOLAS, J. L. Répartition des nombres largement composés. *Séminaire Delange, Pisot, Poitou.* 19e année, 1977-1978, nº 41 et *Acta Arithmetica 34* (1979), 379-390.

[Pis] PISOT, C. and I. J. SCHOENBERG. Arithmetic problems concerning Cauchy's functional equation. *Illinois J. of Math. vol. 8, No. 1* (1964), 40-56.

[Pra] PRACHAR, K. *Primzahlverteilung*. Springer Verlag 1957, Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 91.

[Ramac] RAMACHANDRA, K. A note on numbers with a large prime factor II. *J. Indian Math. Soc. 34* (1970), 39-48.

[Ram] HARDY, G. H. and S. RAMANUJAN. Asymptotic formulae for the distribution of integers of various types. *Proc. of the London Math. Soc. 2*, 16 (1917), 112-132. *Collected Papers of S. Ramanujan*, 245-261.

[Rid] RIDOUT, D. Rational approximations to algebraic numbers. *Mathematika 4* (1957), 125-131.

[Roth] ROTH, K. F. and G. SZEKERES. Some asymptotic formulae in the theory of partitions. *Quart. J. Math. Oxford (2) 5* (1954), 241-259.

[Sat] SATHE, L. G. On a problem of Hardy on the distribution of integers having a given number of prime factors I, II, III, IV. *J. Indian Math. Soc. 17* (1953), 63-141 et *18* (1954), 27-81.

[Sch] SCHMIDT, W. M. Approximation to algebraic numbers. *Enseignement Mathématique 17* (1971), 187-253 et *Monographies de l'Enseignement Mathématique nº 19*, 1972.

[Sel 1] SELBERG, A. Note on a paper by L. G. Sathe. *J. Indian Math. Soc. 18* (1954), 83-87.

[Sel 2] —— On the normal density of primes in small intervals and the difference between consecutive primes. *Arch. Math. Naturvid. 47* (1943), fasc. 6, 87-105.

[Tij] TIJDEMAN, R. On the equation of Catalan. *Acta Arith. 29* (1976), 197-209.

[Tur] TURAN, P. On a theorem of Hardy and Ramanujan. *J. London Math. Soc. 9* (1934), 274-276.

[Wri] HARDY, G. H. and E. M. WRIGHT. *An introduction to the theory of numbers.* Oxford, at the Clarendon Press, IVth edition, 1960.

(Reçu le 15 novembre 1979)

Paul Erdös

Akademia Matematikai Intezete
Realtanoda u. 13-15
H-1053 Budapest, Hongrie

Jean-Louis Nicolas

Département de Mathématique
U.E.R. des Sciences de Limoges
123, avenue Albert-Thomas
F-87060 Limoges cédex, France