Discrete Mathematics 12 (1975) 295–308.

EXTENSION DE QUELQUES THEOREMES SUR LES DENSITES DE SERIES D'ELEMENTS DE N A DES SERIES DE SOUS-ENSEMBLES FINIS DE N

M. DEZA
C.N.R.S., Paris, France

et

Paul ERDÖS
l'Acadêmy hongrois des sciences, Budapest, Hongrie

Reçu le 18 décembre 1974

Abstract. For a sequence $A = \{A_k\}$ of finite subsets of **N** we introduce: $\delta(A) = \inf_{m \leq n} A(m)/2^n$, $d(A) = \lim\inf_{n\to\infty} A(n)/2^n$, where $A(m)$ is the number of subsets $A_k \subseteq \{1, 2, ..., m\}$.

The collection of all subsets of $\{1, ..., n\}$ together with the operation $a \cup b$, $(a \cap b)$, $(a * b = a \cup b \setminus a \cap b)$ constitutes a finite semi-group $N^{\cup}$ (semi-group $N^{\cap}$) (group N^*). For $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ we prove analogues of the Erdös–Landau theorem: $\delta(A+B) \geq \delta(A)(1+(2\lambda)^{-1}(1-\delta(A)))$, where B is a base of N of the average order λ. We prove for $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* analogues of Schnirelmann's theorem (that $\delta(A) + \delta(B) > 1$ implies $\delta(A + B) = 1$) and the inequalities $\lambda \leq 2h$, where h is the order of the base.

We introduce the concept of divisibility of subsets: $a \mid b$ if b is a continuation of a. We prove an analog of the Davenport–Erdös theorem: if $d(A) > 0$, then there exists an infinite sequence $\{A_{k_r}\}$, where $A_{k_r} \mid A_{k_{r+1}}$ for $r = 1, 2, ...$. In Section 6 we consider for $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* analogues of Rohrbach inequality: $\sqrt{2n} \leq g(n) \leq 2\sqrt{n}$, where $g(n) = \min k$ over the subsets $\{a_1 < ... < a_k\} \subseteq \{0, 1, 2, ..., n\}$, such that every $m \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ can be expressed as $m = a_i + a_j$.

Résumé. Pour une série $A = \{A_k\}$ de sous-ensembles finis de **N** on introduit les densités: $\delta(A) = \inf_{m \leq n} A(m)/2^m$, $d(A) = \lim\inf_{n\to\infty} A(n)/2^n$ où $A(m)$ est le nombre d'ensembles $A_k \subseteq \{1, 2, ..., m\}$. L'ensemble de toutes les parties de $\{1, 2, ..., n\}$ devient, pour les opérations $a \cup b$, $a \cap b$, $a * b = a \cup b \setminus a \cap b$, un semi-groupe fini $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ ou un groupe N^* respectivement. Pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ on démontre l'analogue du théorème de Erdös–Landau: $\delta(A + B) \geq \delta(A)(1 + (2\lambda)^{-1}(1-\delta(A)))$, où B est une base de **N** d'ordre moyen λ. On démontre pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* l'analogue du théorème de Schnirelmann (si $\delta(A) + \delta(B) > 1$, alors $\delta(A + B) = 1$) et les inégalités $\lambda \leq 2h$, où h est l'ordre de base. On introduit le rapport de divisibilité des enembles: $a \mid b$, si b est une continuation de a. On démontre l'analogue du théorème de Davenport–Erdös: si $d(A) > 0$, alors il existe une sous-série infinie $\{A_{k_r}\}$, où $A_{k_r} \mid A_{k_{r+1}}$, pour $r = 1, 2, ...$. Dans le Paragraphe 6 on envisage pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* les analogues de l'inégalité de Rohrbach: $\sqrt{2n} \leq g(n) \leq 2\sqrt{n}$, où $g(n) = \min k$ pour les ensembles $\{a_1 < ... < a_k\} \subseteq \{0, 1, 2, ..., n\}$ tels que pour tout $m \in \{0, 1, 2, ..., n\}$ on a $m = a_i + a_j$.

1.

On appelle *semigroupe commutatif naturellement ordonné avec zéro* (désignons-le par $H(\dot{<}, \dot{+}, \dot{0})$) l'ensemble H, $|H| \neq 0$, avec une opération commutative associative $\dot{+}$, avec un élément $\dot{0} \in H$ tel que tous les $a \dot{+} \dot{0} = a$, et avec un tel rapport d'ordre $a \dot{<} b$, qu'on a toujours $a \dot{+} x \geqslant x$ et que $a \dot{<} b \Rightarrow a \dot{+} x = b$ pour un x. L'ensemble $\mathbf{N}$ de tous les entiers non-négatifs est $H(<, +, 0)$.

Soit $P(S) = \{a \subseteq S\}$, où $S = \{1, 2, ..., |S|\}$, $|S| \geqslant 1$ (à propos, partout, plus bas $a \subset b \Rightarrow a \neq b$; désignons également $S \setminus a = \bar{a}$ pour $a \in P(S)$). L'ensemble $P(S)$ est simultanément $H(\subset, \cup, \emptyset)$ et $H(\supset, \cap, S)$; désignons ces semigroupes par $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ respectivement. $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ sont des semigroupes d'idempotents ($a \cup a = a \cap a = a$) et on a

$$\{x \in N^{\cup} / a \cup x = b\} = \{x / b \setminus a \subseteq x \subseteq b\},$$

$$\{x \in N^{\cap} / a \cap x = b\} = \{x / \overline{a \setminus b} \subseteq x \supseteq b\}.$$

En effectuant sur $P(S)$ l'opération $a * b = (a \cup b) \setminus (a \cap b)$ (on l'appelle *somme boolienne* ou *difference symétrique*), nous obtenons un groupe commutatif avec zéro $\emptyset$ (désignons-le N^*) mais N^* (comme tout groupe fini) ne peut être ordonné partiellement; remarquons à ce propos que $a * a = \emptyset$. Les semigroupes $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ sont les semistructures supérieures et habituellement s'envisagent par analogie avec les semigroupes structurellement ordonnés. Dans le Paragraphe 3, on montre qu'en liaison avec le théorème de Erdös–Landau les semigroupes $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ apparaissent en qualité d'analogus finis du semigroupe $\mathbf{N}$ linéairement ordonné (cependant, on n'est parvenu à obtenir l'analogue de ce théorème ni pour N^* ni pour des classes suffisamment larges de semistructures supérieures). Dans les Paragraphes 2, 4, 6 on démontre plusieurs théorèmes dans lesquels $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* sont analogues à $\mathbf{N}$. Dans le Paragraphe 5 dans $P(S)$ on introduit le rapport de divisibilité: $a \mid b$, si b est une continuation de a. On démontre l'analogue du théorème de Davenport–Erdös sur les séries des nombres de $\mathbf{N}$, ayant une densité asymptotique inférieure positive.

2.

Suivant le chapitre 5 de [7], introduisons les désignations suivantes. Soit B une suite d'entiers non-négatifs, c'est-à-dire que $B \subseteq N$. Pour tout $m \in N$ il existe une représentation

$$m = \sum_{1 \leqslant j \leqslant y(m)} b_j, \qquad b_j \in B,$$

où en plus $y(m)$ est le nombre minimal de termes. S'il existe en plus un nombre

$$(1) \qquad h = \max_{m \geqslant 1} y(m)$$

alors B s'appelle *base d'ordre* h. On appelle *ordre moyen* de base B le nombre

$$(2) \qquad \lambda = \sup_{n \geqslant 1} \left(n^{-1} \cdot \sum_{1 \leqslant m \leqslant n} y(m) \right).$$

Dans le théorème 5.1 de [7] il est montré que pour toute base B de N on a

$$(3) \qquad \lambda \leqslant h \leqslant 2\lambda.$$

Soit $A \subseteq N$, désignons $A(n) = |\{x \in A / x \leqslant n\}|$. On appelle *densité* (Schnirelmann) de suite A le nombre

$$(4) \qquad \alpha = \inf_{n \geqslant 1} (n^{-1}(A(n) - A(0))).$$

Soit γ la densité de suite $A + B = \{a + b / a \in A,\ b \in B\}$. En 1936, Erdös a démontré que si $\alpha > 0$, $1 \in A$, B est une base d'ordre h, alors on a

$$(5) \qquad \gamma \geqslant \alpha(1 + (2h)^{-1}(1 - \alpha)).$$

Landau a montré que cette estimation peut être améliorée de la façon suivante

$$(6) \qquad \gamma \geqslant \alpha(1 + (2\lambda)^{-1}(1 - \alpha)).$$

Par analogie avec (1), (2), (4) introduisons les désignations suivantes. Soit $B \subseteq N^{\cup}$ et pour tous $m \in N^{\cup}$ il existe une répresentation minimum

$$m = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant y(m)} b_j, \qquad b_j \in B;$$

il est clair qu'existe max $y(m)$. Désignons

$$(1') \qquad h^{\cup} = \max_{m \in N^{\cup}} y(m).$$

Dans ce cas, appelons B $\cup$-*base* de $N^\cup$ d'ordre h. On appelle *ordre moyen* de $\cup$-base B le nombre

$$(2') \qquad \lambda^\cup = \max_{n \in N^\cup} \Big(\sum_{m \subseteq n} y(m)/|N^\cup(n)| \Big) = \max_{n \in N} \Big(2^{-|n|} \cdot \sum_{m \subseteq n} y(m) \Big).$$

Ici, pour tout $A \subseteq N$ désignons $A(n) = |\{x \in N^\cup / x \subseteq n\}|$. Appelons $\cup$-densité de A le nombre

$$(4') \qquad \alpha^\cup = \min_{n \in N^\cup} (A(n)/|N^\cup(n)|) = \min_{n \in N} (2^{-|n|} \cdot A(n)).$$

Il est clair que $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, que $\alpha = 1 \Leftrightarrow A = N^\cup$ et que $\alpha > 1 \Leftrightarrow \emptyset \in A$. Analogiquement on détermine une $\cap$-base de $N^\cap$ d'ordre $h^\cap$ et une $*$-base de N^* d'ordre h^*; désignons

$$\lambda^\cap = \max_{n \in N^\cap} \Big(\sum_{m \supseteq n} y(m)/|\{x \in N^\cap / x \supseteq n\}| \Big) = \max_{n \in N^\cap} \Big(2^{-|n|} \sum_{m \supseteq n} y(m) \Big),$$

$$\lambda^* = \max_{n \in N^*} \Big(\sum_{m \subseteq n} y(m)/|\{x \in N^* / x \subseteq n\}| \Big) = \max_{n \in N^*} \Big(2^{-|n|} \sum_{m \subseteq n} y(m) \Big).$$

Théorème 1.

(3') (a) *Si B est une $\cup$-base, alors* $1 \leqslant h^\cup \leqslant |S|$, $\lambda^\cup \leqslant h^\cup \leqslant 2\lambda^\cup$.
(b) *Si B est une $\cap$-base, alors* $1 \leqslant h^\cap \leqslant |S|$, $\lambda^\cap \leqslant h^\cap \leqslant 2\lambda^\cap$.
(c) *Si B est une $*$-base, alors* $1 \leqslant h^* \leqslant |S|$, $\lambda^* \leqslant h^* \leqslant 2\lambda^*$.

En effet, soit B une $\cup$-base. Dans la représentation minimum

$$m = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant y(m)} b_j, \qquad b_j \in B,$$

pour tout $1 \leqslant j' \leqslant y(m)$ il existe $f \in S$ tel que $f \notin b_j$ pour tous $1 \leqslant j \leqslant y(m)$, $j \neq j'$ (puisque, au cas contraire,

$$b_{j'} \subset \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant y(m), j \neq j'} b_j$$

et le nombre $y(m)$ n'est pas minimum). Donc, $y(m) \leqslant |S|$, d'où $h^\cup \leqslant |S|$. L'inégalité $\lambda^\cup \leqslant h^\cup$ est évidente si dans (2') on remplace tous les $y(m)$ par leur estimation supérieure $h^\cup$. L'inégalité $h^\cup \leqslant 2\lambda^\cup$ se démontre de la même façon que le théorème 5.1 de [6].

Soit $x \in N^\cup$; il est clair que $x = m \cup (x \setminus m)$ pour un $m \subseteq x$. Donc, en vertu de

$$m = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant y(m)} b_j, \qquad x \setminus m = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant y(x \setminus m)} d_j$$

on a

$$x = \Big(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant y(m)} b_j\Big) \cup \Big(\bigcup_{1\leqslant j\leqslant y(x-m)} d_j\Big), \qquad y(x) \leqslant y(m) + y(x\setminus m).$$

En totalisant la dernière inégalité pour $m \subseteq x$ nous obtenons

$$2^{|x|} y(x) \leqslant \sum_{m\subseteq x} y(m) + \sum_{m\subseteq x} y(x\setminus m) = 2 \sum_{m\subseteq x} y(m).$$

Donc, $y(x) \leqslant 2\lambda^{\cup}$ et, en particulier, $h^{\cup} \leqslant 2\lambda^{\cup}$.

Les affirmations (3')(b), (3')(c) sont démontrées analogiquement; ce faisant, dans la démonstration de $h^{\cap} \leqslant 2\lambda^{\cap}$ on se sert de ce que pour $m \supseteq x$ on a $x = m \cap \overline{m\setminus x}$ et m, $\overline{m\setminus x} \supseteq x$; dans la démonstration de $h^* \leqslant 2\lambda^*$ on se sert de ce que pour $m \subseteq x$ on a $x = m * (x\setminus m)$ et m, $x\setminus m \subseteq x$.

3.

Démontrons maintenant l'analogue de (6) (théorème de Erdös–Landau) pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$. Pour tous $i = 1, 2, 3, ..., |S|$ désignons $q(i) = (3^i - 2^{i-1})/2^{2i-1}$. Il est clair que $q(i)$ est une fonction décroissante ($q(i) = 1, 7/8, 23/32, 73/128$ pour $q = 1, 2, 3, 4$).

Pour tous $A, B \subseteq N^{\cup}$ désignons $C_b = \{c = a \cup b / a \in A\}$, $C = \bigcup_{b\in B} C_b$; désignons par $\gamma_b^{\cup}$, $\gamma^{\cup}$ les $\cup$-densités des ensembles C_b, C respectivement. Soit $\bar{\gamma} = \max_{b\in B} \gamma_b$. Analogiquement, on introduit les $\cap$-densités $\gamma_b^{\cap}$, $\gamma^{\cap}$, $\bar{\gamma}^{\cap}$.

Théorème 2.
(6') (a) *Si B est une $\cup$-base de $N^{\cup}$, alors*

$$\gamma^{\cup} \geqslant \bar{\gamma}^{\cup} \geqslant \alpha^{\cup}(1 + (2\lambda^{\cup})^{-1}(q(|S|) - \alpha^{\cup})).$$

(b) *Si B est une $\cap$-base de $N^{\cap}$, alors*

$$\gamma^{\cap} \geqslant \bar{\gamma}^{\cap} \geqslant \alpha^{\cap}(1 + (2\lambda^{\cap})^{-1}(q(|S| - \alpha^{\cap})).$$

En effet, il suffit de démontrer uniquement (6')(a) (aussi, plus loin, écrirons-nous partout γ, $\bar{\gamma}$, α, λ au lieu de $\gamma^{\cup}$, $\bar{\gamma}^{\cup}$, $\alpha^{\cup}$, $\lambda^{\cup}$ respectivement), puisque la démonstration de (6')(b) s'obtient facilement de la démonstration de (6')(a), en remplaçant $a \cup b$, $a \subset b$, $b \setminus a$, $\emptyset$ par $a \cap b$, $a \supset b$, $\overline{a\setminus b}$, S respectivement. La démonstration suivante de (6')(a) est une modification de la démonstration de (6), donnée par Mann dans le chapitre 5 de [7]; on conserve presque toutes les désignations de la démonstration de [7].

On donne $\emptyset \neq n \in N^{\cup}$. Pour tout $m \subseteq n$ désignons

$$D_m = \{a \in A / a \subseteq n \setminus m,\ a \cup m \notin A\},$$

$$E_m = \{a \in A / a \subseteq n \setminus m,\ a \cup m \in A\}.$$

On a

$$|D_m| + |E_m| = A(n \setminus m). \tag{7}$$

Soient $Z(n) = |\{(a_i, a_j)/n \supseteq a_i,\ a_j \in A,\ a_i \subset a_j\}|$. On a $Z(n) \leqslant \binom{A(n)}{2}$, puisque $a_i \subset a_j \Rightarrow a_j \not\subset a_i$. Pour chaque paire semblable on a $a_i \in E_k$, où $k = a_j \setminus a_i$ $(\emptyset \neq k \subseteq n)$, puisque $a_i \in A$, $a_i \subseteq a_i \cup (n \setminus a_j) = n \setminus (a_j \setminus a_i) = n \setminus k$, $a_i \cup k = a_j \in A$. Pour $k' \neq k$, $a_i \in E_{k'}$, $a_i \cup k' = a_j$ est impossible (puisque $a_i \cup k' = a_i \cup k$, $k' \neq k = a_j \setminus a_i \Rightarrow k' \setminus k$ existe et $\neq \emptyset$; $a_i \subseteq n \setminus k$, $k' \setminus k = \emptyset \Rightarrow a_i \cup (k' \setminus k) \supset a_i$, d'où en vertu de $a_i \subseteq n \setminus k$ on a $a_i \cup (k' \setminus k) \cup k \supset a_i \cup k$, ce qui contredit à $a_i \cup k' = a_i \cup k$. D'un autre côté, à toute paire k $(\emptyset \neq k \subseteq n)$, a_i $(a_i \in E_k)$ correspond exactement une paire a_i, $a_i \cup k$ des $Z(n)$ paires envisagées. Donc,

$$\sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} |E_m| = Z(n) \leqslant \binom{A(n)}{2}. \tag{8}$$

Pour t, m $(t \subseteq m \subseteq n)$ et a_i $(a_i \in D_m,\ a_i \notin D_t)$ désignons $a \cup t = a'$. On a $a' \in D_{m \setminus t}$, puisque $a' \in A$ (au cas contraire $a \cup t \notin A$, $a \subseteq n \setminus t$ (en vertu de $a \subseteq n \setminus m$, $t \subseteq m$) et donc $a \in D_t$), $a' \subseteq n \setminus (m \setminus t)$ en vertu de $a \subseteq n \setminus m$, $a' \cup (m \setminus t) = (a \cup t) \cup (m \setminus t) = a \cup m \notin A$ en vertu de $a \in D_m$. Aux différents a (et il n'y en a que $|D_m \setminus (D_m \cap D_t)| \geqslant |D_m| - |D_t|$) correspondent différents a'. Donc,

$$|D_m| \leqslant |D_t| + |D_{m \setminus t}|. \tag{9}$$

Soit $m = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant y(m)} b_j$ une représentation minimum de m sous forme d'une réunion d'éléments de B. On a tous les $b_j \subseteq m$; donc, en appliquant conséquemment (9), nous obtenons

$$|D_m| \leqslant |D_{b_1}| + \ldots + |D_{b_{y(m)}}|. \tag{10}$$

A plus forte raison

$$\sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} |D_m| \leqslant \sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} (y(m) \cdot |D_{b'}|),$$

où l'élément $b' \in \{b_j / 1 \leqslant j \leqslant y(m),\ \emptyset \neq m \subseteq n\}$ est choisi de façon que

$$D_{f''} = \max_{\emptyset \neq m \subseteq n} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant y(m)} |D_{b_j}| \right).$$

Ensuite

$$\sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} |D_m| \leqslant |D_{b'}| \cdot 2^{|n|} \Big(\sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} 2^{-|n|} y(m) \Big) \leqslant 2^{|n|} \lambda \, |D_{b'}|.$$

Mais $D_{b'} \subseteq \{a \in A / a \cup b' \subseteq n,\ a \cup b' \notin A\}$; donc, rappelant la désignation $C_{b'}(n) = |\{c = a \cup b' / c \subseteq n,$ pour $a \in A\}|$, nous obtenons

$$(11) \qquad \sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} |D_m| \leqslant \lambda 2^{|n|} (C_{b'}(n) - A(n)).$$

En appliquant (7) et (8) nous obtenons

$$(12) \qquad \lambda 2^{|n|} (C_{b'}(n) - A(n)) \geqslant \sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} A(n \setminus m) - \sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} |E_m|$$

$$\geqslant \sum_{m \subset n} A(m) - \binom{A(n)}{2},$$

$$\lambda 2^{|n|} C_{b'}(n) \geqslant \lambda 2^{|n|} A(n) + \sum_{m \subseteq n} (2^{|m|} (2^{-|m|} A(m))) - \binom{A(n)}{2}$$

$$\geqslant \lambda 2^{|n|} A(n) + \sum_{m \subset n} 2^{|m|} - \tfrac{1}{2}((A(n))^2 - A(n)).$$

Il est clair que

$$\sum_{m \subset n} 2^{|m|} = -2^{|n|} + \sum_{0 \leqslant i \leqslant |n|} \binom{|n|}{i} 2^i = (2+1)^{|n|} - 2^{|n|} = 3^{|n|} - 2^{|n|},$$

et que $A(n) \geqslant 2^{|n|} \alpha$. Donc

$$\lambda 2^{|n|} C_{b'}(n) \geqslant (3^{|n|} - 2^{|n|}) \alpha + 2^{|n|} \tfrac{1}{2} \alpha + \lambda 2^{|n|} A(n) - \tfrac{1}{2} (A(n))^2.$$

Ensuite, en divisant les deux parties de l'inégalité par $2^{2|n|}$ et en rappelant la désignation $q(i) = (3^i - 2^{i-1})/2^{2i-1}$, nous obtenons

$$(13) \qquad \lambda 2^{-|n|} C_{b'}(n) \geqslant \tfrac{1}{2} q(|n|) \alpha + \lambda 2^{-|n|} A(n) - \tfrac{1}{2} (2^{-|n|} A(n))^2.$$

En vertu de $\lambda \geqslant 1$ on a $(\mathrm{d}/\mathrm{d}x) / \lambda x - \frac{1}{2} x^2 = \lambda - x \geqslant 0$ pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Mais $\alpha \leqslant 2^{-|n|} A(n) \leqslant 1$; donc,

$$\lambda 2^{-|n|} C_{b'}(n) \geqslant \tfrac{1}{2} q(|n|) + \lambda \alpha - \tfrac{1}{2} \alpha^2,$$

$$2^{-|n|} C_{b'}(n) \geqslant \alpha (1 + (2\lambda)^{-1} (q(|n|) - \alpha)),$$

$$\gamma_{b'} \geqslant \alpha (1 + (2\lambda)^{-1} (q(|S|) - \alpha)).$$

Mais $\gamma \geqslant \bar{\gamma} \geqslant \gamma_b$, et donc le théorème est démontré.

Remarque 1. Une analogie plus rigoreuse avec l'ordre moyen de la base et de la densité d'une suite est représentée dans $N^{\cup}$ par

$$(2'') \qquad \lambda^0 = \max_{\emptyset \neq n \in N^{\cup}} (2^{-|n|}-1) \sum_{\emptyset \neq m \subseteq n} y(m),$$

$$(4'') \qquad \alpha^0 = \min_{\emptyset \neq n \in N^{\cup}} (2^{-|n|}-1)(A(n) - A(\emptyset)).$$

Désignons $q^0(i) = 6(3^{i-1} - 2^{i-1} + 1/6)/(2^i - 1)^2$ pour $i = 1, 2, 3, \ldots, |S|$; la fonction $q^0(i)$ décroît ($q^0(i) = 1, 7/9, 31/49, 23/45$ pour $i = 1, 2, 3, 4$). En introduisant les modifications correspondantes dans la démonstration du théorème 2, on peut montrer

(6″)(a) si B est une $\cup$-base de $N^{\cup}$, alors

$$\gamma^0 \geqslant \bar{\gamma}^0 \geqslant \alpha^0 (1 + (2\lambda^0)^{-1} (q^0(|S|) - \alpha^0)).$$

(Cependant, dans le cas insignifiant $A \ni \emptyset \in B$ la démonstration de (6″)(a) est encombrante.)

Remarque 2. Pour le groupe N^* on obtient des analogues de (7), (8) mais pas de (9); pour les semistructures supérieures on obtient des analogues de (7), (9), mais pas de (8), On n'est pas parvenu à obtenir l'analogue de la première inégalité fondamentale (c'est l'inégalité utilisée dans [7] pour la démonstration du difficile théorème de Kasch, qui renforce (6), puisque (8) est une inégalité à la différence de son original.

Remarque 3. En vertu du fait que $q(i) \leqslant 1$, $q^0(i) \leqslant 1$, les estimations (6′)(a), (6″)(a) sont plus faibles que les estimations $\gamma \geqslant (1+(2\lambda)^{-1}(1-\alpha))\alpha$ de Erdös–Landau (pour **N**). Mais (6′)(a) (pour $N^{\cup}$) coïncide avec (6) (pour **N**) pour

$$\gamma_{b'} = \min_{n \in N^{\cup}, |n|=1} (2^{-|n|} C_{b'}(n)),$$

(et alors $\gamma_{b'} = 0, \frac{1}{2}, 1$); (6″)(a) (pour $N^{\cup}$) coïncide avec (6) (pour **N**) pour

$$\gamma^0_{b'} = \min_{m \in N^{\cup}, |n|=1} ((2^{-|n|}-1)(C_{b'}(n) - C_{b'}(\emptyset))).$$

4.

Comparons maintenant la situation dans $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* avec les théorèmes suivants de Schnirelmann et de Mann pour l'ensemble **N** d'entiers non-négatifs. Soit $A, B \subseteq \mathbf{N}$; désignons $C = A + B = \{a+b/a\in A,\ b\in B\}$, désignons par α, β, γ les densités (cf. (4)) de A, B, C respectivement. Les deux théorèmes suivants de Schnirelmann (1930) ont lieu:

(14) si $1 \in A$ et $0 \in B$, alors $\gamma \geqslant \alpha + \beta - \alpha\beta$,

(15) si $0 \in A \cap B$ et $\alpha + \beta \geqslant 1$, alors $\gamma = 1$.

Mann en 1942 a démontré le théorème fondamental suivant:

(16) si $0 \in A \cap B$, alors $\gamma \geqslant \min(1, \alpha + \beta)$.

Montrons que dans $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* ont lieu les analogues de (15), mais que n'ont pas lieu pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ les analogues de (14) (et donc de (16) encore plus). Soit $A, B \subseteq P(S)$, où $P(S)$ est l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble $S = \{1, ..., |S|\}$, $|S| \geqslant 1$. Désignons $C^{\cup} = A \mathbin{\dot\cup} B = \{a \cup b/a \in A,\ b \in B\}$, désignons par $\alpha^{\cup}$, $\beta^{\cup}$, $\gamma^{\cup}$ les $\cup$-densités (cf. (4')) de A, B, $C^{\cup}$ respectivement. Analogiquement définissons les ensembles $C^{\cap} = \{a \cap b/a \in A,\ b \in B\}$, $C^* = \{a * b/a \in A,\ b \in B\}$ et les $\cap$-densités $\alpha^{\cap}$, $\beta^{\cap}$, $\gamma^{\cap}$ de A, B, $C^{\cap}$ respectivement et les $*$-densités α^*, β^*, γ^* de A, B, C^* respectivement.

Théorème 3.

(15') (a) $\alpha^{\cup} + \beta^{\cup} > 1 \Rightarrow \gamma^{\cup} = 1$.
(b) $\alpha^{\cap} + \beta^{\cap} > 1 \Rightarrow \gamma^{\cap} = 1$.
(c) $\alpha^* + \beta^* > 1 \Rightarrow \gamma^* = 1$.

En effet, (15')(a) peut être démontré en modifiant un peu la démonstration de (15). Remarquons que $\alpha^{\cup} + \beta^{\cup} > 1 \Rightarrow \emptyset \in A \cap B$, puisque, au cas contraire, on aurait, par exemple, $\emptyset \notin A$, d'où $\alpha^{\cup} = 0$, $\alpha^{\cup} + \beta^{\cup} = \beta^{\cup} > 1$, ce qui est impossible. Supposons que $\alpha^{\cup} + \beta^{\cup} > 1 \not\Rightarrow \gamma^{\cup} = 1$, c'est-à-dire qu'existe $n \in N^{\cup}$, tel que $n \notin C^{\cup}$. En vertu de $\emptyset \in A \cap B$ on a $n \notin A$, $n \notin B$. Envisageons les ensembles $A_n = \{a \in A/a \subseteq n\}$, $B_n = \{b \in B,\ b \subseteq n\}$; soient $A_n = \{a_1, ..., a_u\}$, $B_n = \{b_1, ..., b_v\}$, soient $P_n = \{a_1, ..., a_u, n \setminus b_1, ..., n \setminus b_v\}$. On a $|P_n| = u + v$, puisque, au cas contraire $a_i = n \setminus b_j$ et, donc, $n = a_i \cup b_j$. Mais pour $p \in P_n$ on a $\emptyset \subseteq p \subseteq n$ et donc, $|P_n| \leqslant 2^{|n|}$, $u + v \leqslant 2^{|n|}$. D'autre part $1 < \alpha^{\cup} + \beta^{\cup} \leqslant |A_n|/2^{|n|} + |B_n|/2^{|n|}$, c'est-à-dire que $2^{|n|} < u + v$. La contradiction obtenue démontre (15')(a). La démonstration de (15')(b) est analogue (il faut partout remplacer $\cup$, $\emptyset$, $n \setminus b_j$ par $\cap$, S, $\overline{b_j \setminus n}$ respectivement). La démonstration de (15')(c) s'obtient en remplaçant $\cup$, $n \setminus b_j$ par $*$, $n * b_j$ respectivement; ici nous utilisons le fait que $n * b_j \subseteq n$ pour $b_j \subseteq n$ et que $a_i = n * b_j \Leftrightarrow a_i * b_j = n$.

Remarque 4. Envisageons l'exemple suivant pour $S = \{1,2,3\}$: $A = \{\emptyset\}, \{1\}$; $B = \{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,2,3\}$. Il est clair que $\alpha^{\cup} = \frac{1}{4}$, $\beta^{\cup} = \frac{3}{4}$ et que $\gamma^{\cup} = \frac{3}{4}$ (puisque $C^{\cup} = B$). Nous obtenons un contre-exemple pour les analogues de (15) (dans le cas $\alpha + \beta = 1$) et de (14), (16). Le problème de la recherche d'estimations du type (14), (16) pour $\gamma^{\cup}$ (au sens d'une définition de (4') ou de (4")) reste ouvert. En remplaçant dans A, B tous les ensembles par leurs compléments, nous obtiendrons un contre-exemple analogue pour $\gamma^{\cap}$.

Remarque 5. N^* est un groupe abélian fini. Aussi, en aplliquant à N^* les théorèmes de Kneser (cf. les théorèmes 1.5, 1.6 de [7], nous obtenons pour tous $A, B \subseteq N^*$ (ici $A \mathbin{\dot{*}} B = \{a * b / a \in A,\ b \in B\}$),

(17) il existe un sousgroupe H de N^*, tel que $(A \mathbin{\dot{*}} B) \mathbin{\dot{*}} H = A \mathbin{\dot{*}} B$ et que $|A \mathbin{\dot{*}} B| \geqslant |A \mathbin{\dot{*}} H| + |B \mathbin{\dot{*}} H| - |H|$,

(18) si H est le plus grand sousgroupe de N^*, tel que $(A \mathbin{\dot{*}} B) \mathbin{\dot{*}} H = A \mathbin{\dot{*}} B$, alors $|A \mathbin{\dot{*}} B| \geqslant |A| + |B| - 2|H|$.

Ainsi, (17), (18) donnent de bonnes estimations pour γ^*. Reste ouvert le problème de la justification dans N^* de l'analogue du théorème de Vosper (cf. le théorème 1.3 de [7]), dans lequel on montre que dans un groupe de résidus mod p (p est un nombre premier) on a $|A+B| \geqslant |A| + |B|$, à l'exception de quelques cas spéciaux exactement décrits.

5.

Davenport et Erdös ont démontré en 1951 (cf. le théorème 5 du chapitre 5 de [6]) que toute série d'entiers non-négatifs, possédant une densité logarithmique inférieure positive, contient une sous-série a_{i_1}, a_{i_2}, ..., telle que $a_{i_r} \mid a_{i_{r+1}}$ ($r = 1, 2, 3, \ldots$). Nous demontrons ci-dessous l'analogue de ce théorème.

Soit $A = \{A_k\}$ une famille d'ensembles finis d'entiers non-négatifs, c'est-à-dire que tous $A_k \subset \mathbf{N}$. Nous dirons que $\{A_k\}$ a une densité asymptotique inférieure positive s'il existe une constante absolue $c > 0$ et une infinité de nombres $n \in \mathbf{N}$ tels qu'au moins $c \cdot 2^n$ ensembles A_k sont contenus dans $(1, n)$. Définissons de la façon suivante la division des ensembles A_k : désignons par $A_{k_1} \mid A_{k_2}$ l'affirmation que A_{k_2} est la *continuation* de A_{k_1}, c'est-à-dire que $A_{k_1} = (a_1, \ldots, a_{p_1})$, $a_1 < \ldots < a_{p_1}$, et $A_{k_2} = (a_1, \ldots, a_{p_1}, a_{p_1+1}, \ldots, a_{p_2})$, $a_1 < \ldots < a_{p_1} < a_{p_1+1} < \ldots < a_{p_2}$.

Théorème 4. *Soit la famille $A = \{A_k\}$ a une densité asymptotique inférieure positive. Alors existe $A_u \in \{A_k\}$ tel que la famille $A' = \{A_k/A_u \mid A_k\}$ a une densité asymptotique inférieure positive.*

En effet, il existe une infinité de nombres n tels qu'il existe $c \cdot 2^{n-1}$ ensembles A_k ayant n en qualité d'élément le plus grand. Remarquons également que si $A_{k_1} \nmid A_{k_2}$ et $A_{k_2} \nmid A_{k_1}$, il n'existe pas d'ensemble A_l tel que $A_{k_1} \mid A_l$, $A_{k_2} \mid A_l$.

Soient $n_1 < ... < n_t$ tels qu'il existe $c \cdot 2^{n_k - 1}$ ensembles de famille, dont le plus grand élément est n_k, $1 \leqslant k \leqslant t$. Soit $x > n_t$ et soit A_l un ensemble avec un élément maximum $m_l \leqslant n_t$. Il existe $2^{x - m_l}$ ensembles B tels que $B \subseteq (1, x)$ et $A_l \mid B$.

Ainsi, il existe au moins $c \cdot 2^{x-1}$ ensembles B, tels que $A_l \mid B$ et que leur élément maximum est n_k. Donc, il existe au moins $tc \cdot 2^{x-1}$ ensembles B avec $A_l \mid B$ pour un A_l, $m_l = n_1$ ou $= n_2$, ..., ou $= n_t$.

Mais $tc \cdot 2^{x-1} > 2^x$ pour un nombre assez grand $t = t_0(c)$, ce qui est impossible à l'exception du cas où les deux ensembles A_l $(m_l = n_1, ..., n_k)$ ont un multiple commun, ce qui est possible uniquement pour $A_{k_1} \mid A_{k_2}$. Ainsi, $\{A_k\}$ est une série "non-primitive" (c'est l'analogue du théorème connu) suivant lequel $d(A) = 0$ pour toute série primitive de **N**. Bien plus, il est clair qu'il existe un nombre $c' > 0$ tel qu'au moins $c' \cdot 2^x$ ensembles A_l $(m = n_1, ..., n_k)$ ont un multiple commun, ce qui est possible uniquement si l'un d'eux divise (est la continuation) tous les autres. Le théorème est démontré.

Remarque 6. La conséquence évidente du théorème 4 est que toute suite $\{A_k\}$ d'ensembles de **N**, ayant une densité asymptotique inférieure positive, contient une sous-suite infinie $\{A_{k_i}\}$, telle que $A_{k_r} \mid A_{k_{r+1}}$ $(r = 1, 2, 3, ...)$. Remarquons également que dans le théorème de Davenport et Erdös on parlait d'une densité logarithmique inférieure

$$\delta(A) = \liminf_{n \to \infty} \left(\frac{1}{\log n} \sum_{a_i \leqslant n} \frac{1}{a_i} \right),$$

et non d'une densité asymptotique $d(A) = \liminf_{n \to \infty} (A(n)/n)$; en raison de $\delta(A) \geqslant d(A) \geqslant 0$, le théorème de Davenport et Erdös est plus fort que l'affirmation correspondante pour $d(A)$. Le théorème 4 est démontré pour l'analogue de $d(A)$, puisque, lorqu'on passe des suites A d'éléments de **N** aux suites A_k d'ensembles de **N** il est difficile de trouver l'analogue naturel de $\delta(A)$.

Indiquons ici même deux conjectures:

(1) Pour toute famille $\{A_k\}$ d'ensembles, on a qu'une famille d'ensembles $\{B\}$ pour lesquels $A_k \nmid B$ pour chaque k, a la densité. Apparemment, cette conjecture est également exacte au cas où $A_k \mid A_l$ est défini par $A_k \subseteq A_l$ (à propos, un avantage de cette définition est la présence pour tous A_k, A_l de leur plus petit commun multiple $A_k \cup A_l$). L'analogue de cette conjecture n'est pas exact pour les séries de nombres de **N** (cf. les théorèmes de Erdös dans Paragraphes 5, 6 ch. 5 de [6]).

(2) Pour toute famille $\{A_k\}$ d'ensembles tels que tous les $A_i \cup A_j$ sont différents, on a $\liminf_{n\to\infty} A(n)/2^{n/2} = 0$, mais pour certains $\{A_k\}$ on a $\limsup_{n\to\infty} A(n)/2^{n/2} > 0$. Les analogues (pour des séries de nombres de **N**) des deux affirmations de cette conjecture ont été démontré par Erdös (cf. Paragraphe 3; Sidon's problèmes dans ch. 2 de [6]).

6.

Envisageons maintenant un autre problème par rapport auquel les semigroupes $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, et aussi N^*, se comportent analogiquement à N. Désignons par $\sqrt[k]{\{0,1,...,n\}}$ tout ensembles $B \subseteq \mathbf{N}$, tel que pour tout non-nul $a \in 0, 1, ..., n$ on a $a = b_1 + ... + b_r$ pour des différents $b_1, ..., b_r \in B$, $r \leqslant k$. Désignons par $\sqrt[k]{N^{\cup}}$, $\sqrt[k]{N^{\cap}}$, $\sqrt[k]{N^*}$ tout ensembles $B \subseteq N^{\cup}$ ($N^{\cap}$, N^*, respectivement) tel que pour tout non-nul $a \in N^{\cup}$ ($N^{\cap}$, N^*, respectivement) on a $a = b_1 \cup ... \cup b_r$ ($a = b_1 \cap ... \cap b_r$, $a = b_1 * ... * b_r$, respectivement) pour des différents $b_1, ..., b_r \in B$, $r \leqslant k$. Désignons pour k et n, $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^* donnés

$$\beta_k = \min|\sqrt[k]{\{0,1,...,n\}}|, \qquad \beta_k^{\cup} = \min|\sqrt[k]{N^{\cup}}|,$$

$$\beta_k^{\cap} = \min|\sqrt[k]{N^{\cap}}|, \qquad \beta_k^{*} = \min|\sqrt[k]{N^{*}}|$$

et appelons les ensembles réalisant les nombres β_k, $\beta_k^{\cup}$, $\beta_k^{\cap}$, β_k^*, *racines minimales de degré* k de $\{0,1, ..., n\}$, $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, N^*, respectivement.

Dans [3] on montre le résultat de Rohrbach suivant $(1+\epsilon)\sqrt{2n} \leqslant \beta_2 \leqslant 2\sqrt{n}$ pour un $\epsilon > 0$.

Dans [8] on montre que pour $\log_2 |N^{\cup}| = |S|$ pair on a $\sqrt{2|N^{\cup}|} < \beta_2^{\cup} \leqslant 2\sqrt{|N^{\cup}|}$.

Restent provisoirement non-résolus: la conjecture de Rohrbach ($\beta_2 \overset{?}{=} 2\sqrt{n} + o(1)$) et le problème de Erdös–Moser ($\beta_2^{\cup} >$ (ou $<$) $(1,75)\sqrt{|N^{\cup}|}$?) (cf. [5]).

Théorème 5. *Il existe des constantes C_1, C_2 (dépendant seulement de k) telles que* $C_1 \sqrt[k]{2^{|S|}} \leqslant \beta_k^{\cup}, \beta_k^{\cap}, \beta_k^* \leqslant C_2 \sqrt[k]{2^{|S|}}$.

En effet, soit B une racine minimum $\sqrt[k]{N^{\cup}}$. L'ensemble d'ensembles $\{b_1 \ldots b_r / b_1, \ldots, b_r \in B,\ r \leqslant k\}$ contient au plus $\Sigma_{1 \leqslant r \leqslant k} \binom{|B|}{r}$ éléments et en même temps, il contient un quelconque élément de $N^{\cup} \setminus \{\emptyset\}$. Donc,

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \binom{\beta^{\cup}_k}{r} \geqslant |N^{\cup}| - 1.$$

Pour $|S| \to \infty$ on a $|N^{\cup}| \gg k$, $\beta_k^{\cup} \gg k$ et, donc, a lieu la formule connue

$$\sum_{1 \leqslant r \leqslant k} \binom{Z}{r} \approx k \binom{Z}{k} \approx k \frac{Z^k}{k!} \mathrm{e}^{-\tau k^2/(Z-k)} \qquad (0 < \tau < \tfrac{1}{2}),$$

d'où nous obtenons l'estimation inférieure pour $\beta_k^{\cup}$; pour $\beta_k^{\cap}$, β_k^* la démonstration est analogue.

Appelons le système de sous-semigroupes $N_1^{\cup}, \ldots, N_k^{\cup}$ de $N^{\cup} \setminus \{\emptyset\}$ *k-convenable* si on a

(a) $|N_1^{\cup}| = \ldots = |N_{k-1}^{\cup}| = 2^{[|S|/k]} - 1$, $|N_k^{\cup}| = 2^{|S|-(k-1)[|S|/k])} - 1$.

(b) $a \in N^{\cup} \setminus \{\emptyset\} \Rightarrow a = b_{j_1} \cup \ldots \cup b_{j_r}$ pour des $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant k$ et $b_{j_1} \in N_{j_1}^{\cup}, \ldots, b_{j_r} \in N_{j_r}^{\cup}$.

(c) Pour tous $1 \leqslant \bar{j} \leqslant k$, $a \in N_{\bar{j}}^{\cup}$ il n'existe pas de représentation $a = b_{j_1} \cup \ldots \cup b_{j_r}$, où $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant k$, tous les $j_1, \ldots, j_r \neq \bar{j}$ et $b_{j_1} \in N_{j_1}^{\cup}, \ldots, b_{j_r} \in N_{j_r}^{\cup}$. (Voilà un example de système k-convenable pour $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $k = 3$. $N_1 = \{1\}, \{2\}, \{1,2\}$; $N_2 = \{3\}, \{4\}, \{3,4\}$; $N_3 = \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{5,6\}, \{5,7\}, \{6,7\}, \{5,6,7\}$.)

Soit $B = \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} N_j^{\cup}$. Il est clair, en vertu de (a), que $B = \sqrt[k]{N^{\cup}}$; donc, $\beta_k^{\cup} \leqslant |B| = (k-1)\,(2^{[|S|/k]} - 1) + (2^{|S| - (k-1)[|S|/k]} - 1)$. Soit $|S| - (k-1)\,[|S|/k] = q$ $(0 \leqslant q < k)$. On a $|B| = 2^{[|S|/k]}(k - 1 + 2^{[|S|/k] + q/k}) + k$, d'où découle l'estimation supérieure pour $\beta_k^{\cup}$. La même estimation a lieu pour β_k^*, puisque $B = \sqrt[k]{N^*}$ (en vertu de (c)) nous pouvons remplacer le signe $\cup$ par $*$ dans (a), (b). Enfin, en rappelant la désignation $\bar{a} = S \setminus a$ pour $a \in N^{\cap}$, désignons $N_j^{\cap} = \{\bar{a} / a \in N_j\}$ pour $1 \leqslant j \leqslant k$. Il est évident que

$$\left| \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} N_j^{\cap} \right| = \left| \bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} N_j^{\cap} \right| = |B|.$$

Mais $\bigcup_{1 \leqslant j \leqslant k} N_j = \sqrt[k]{N^{\cap}}$ puisque $\bar{a} = b_{j_1} \cup \ldots \cup b_{j_r} \Rightarrow a = b_{j_1} \cap \ldots \cap b_{j_r}$. Nous obtenons $|B| \geqslant \beta_k^{\cap}$ et le théorème est démontré.

Remarque 7. Ce théorème est démontré par analogie avec le lemme 1 de [2]. Dans [2] on montre que le problème de la recherche d'une racine minimum $\sqrt{N^*}$ est directement lié à celui du bruit additif le pire (du point de vue des possibilités de construction d'un code correcteur effectif) contenant un nombre donné d'éléments de F_2^n. On y montre aussi que $\beta_2^* = 1, 2, 4, 5, 9$ pour $|S| = 1, 2, 3, 4, 5$ et que $-\frac{1}{2} + \sqrt{2^{|S|} - \frac{3}{4}} < \beta_2^* < 2^{[|S|/2]} + 2^{|S| - [|S|/2]} - 2$ pour $|S| \geqslant 6$. Dans le théorème 1 de [2] pour tout sous-ensemble B_1 de racine minimum $\sqrt{N^*}$ on donne les estimations de son "rôle relatif" $|\sqrt{N^*} \setminus B_1|$ par $|B_1|$.

Note ajoutée en épreuve. Nous avons récemment prouvé la conjecture (1) de paragraphe 5 et J.S. Huang (Université de Montréal) a prouvé la conjecture (2) de paragraphe 5.

Références

[1] A.N. Clifford and G.B. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups (Am. Math. Soc., Providence, R.I., 1964).

[2] M. Deza, Racine minimum d'un groupe abélien élémentaire, Can. J. Math., to appear.

[3] P. Erdös, On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, Acta Arith. 1 (1936) 197–200.

[4] P. Erdös, Problems and results on a combinatorial number theory, in: J.N. Srivastava et al., eds., A Survey of Combinatorial Theory (North-Holland, Amsterdam, 1973) 117–138.

[5] P. Erdös and D.J. Kleitman, Extremal problems among subsets of a set, Discrete Math. 8 (1974) 281–294.

[6] H. Halberstam and K.F. Roth, Sequences (Oxford Univ. Press, London, 1966).

[7] H.B. Mann, Addition Theorems, Tract. in Math. 18 (Wiley, New York, 1965).

[8] L. Moser, Problem 24, Colorado Conference (1959) 341.