Séminaire DELANGE-PISOT-POITOU
(Théorie des nombres)
16e année, 1974/75, n° 8, 2 p.



16 décembre 1974

# EXTENSIONS DE QUELQUES THÉORÈMES DE DENSITÉ

par Michel DEZA et Paul ERDÖS

## Résumé.

Pour une série $A = \{A_k\}$ de sous-ensembles finis de $\underset{\sim}{N}$, on introduit les densités

$$\sigma(A) = \inf_{m \leq n} A(m)/2^m \ , \quad d_{\inf}(A) = \lim\inf_{n \to \infty} A(n)/2^n \ ,$$

où $A(m)$ est le nombre d'ensembles $A_k \subseteq \{1 , 2 , \ldots , m\}$. L'ensemble de toutes les parties de $\{1 , 2 , \ldots , n\}$ devient, pour les opérations $a \cup b$, $a \cap b$, $a * b = a \cup b - a \cap b$, un sous-groupe fini $N^{\cup}$, $N^{\cap}$ ou un groupe $N^*$ respectivement. Pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, on démontre l'analogue du théorème de Erdös-Landau

$$\sigma(A + B) \geq \sigma(A)(1 + (2\lambda)^{-1}(1 - \sigma(A))) \ ,$$

où $B$ est une base de $\underset{\sim}{N}$ d'ordre moyen $\lambda$. On démontre pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, $N^*$ l'analogue du théorème de Schnirelmann (si $\sigma(A) + \sigma(B) > 1$, alors $\sigma(A+B) = 1$) et les inégalités $\lambda \leq 2h$, où $h$ est l'ordre de base. On introduit le rapport de divisibilité des ensembles $a|b$, si $b$ est une continuation de $a$. On démontre l'analogue du théorème de Davenport-Erdös : si $d_{\inf}(A) > 0$, alors il existe une sous-série infinie $\{A_{k_r}\}$, où $A_{k_r} | A_{k_{r+1}}$, pour $r = 1 , 2 , \ldots$ On envisage aussi pour $N^{\cup}$, $N^{\cap}$, $N^*$ les analogues de l'inégalité de Rohrbach : $\sqrt{2n} \leq g(n) \leq 2\sqrt{n}$, où $g(n) = \min k$ pour les ensembles $\{a_1 < \ldots < a_k\} \subseteq \{0 , 1 , 2 , \ldots , n\}$ tels que, pour tout $m \in \{0 , 1 , 2 , \ldots , n\}$, on a $m = a_i + a_j$.

## BIBLIOGRAPHIE

[1] CLIFFORD (A. N.) and PRESTON (G. B.). – The algebraic theory of semigroups, Vol. 1 and 2. – Providence, American mathematical Society, 1961, 1967 (Mathematical Surveys, 7).

[2] DEZA (M.). – Racine minimum d'un groupe abélien élémentaire, Canad. J. Math. (à paraître).

[3] ERDÖS (P.). – On the arithmetical density of the sum of two sequences one of which forms a basis for the integers, Acta Arith., Warszawa, t. 1, 1936, p. 197-200.

[4] ERDÖS (P.). – Problems and results on a combinatorial number theory, "A survey of combinatorial theory", p. 117-138. – Amsterdam, North-Holland publishing Company, 1973.

[5] ERDÖS (P.) and KLEITMAN (D. J.). – Extremal problems among subsets of set, Discrete Mathematics, t. 8, 1974, p. 281-294.

[6] HALBERSTAM (H.) and ROTH (K. F.). - Sequences. - Oxford, at the Clarendon Press, 1966.

[7] MANN (H. B.). - Addition theorems : The addition theorems of group theory and number theory. - New York, Interscience Publishers, 1965 (Interscience Tracts in pure and applied Mathematics, 18).

(Texte reçu le 9 décembre 1974)

Michel DEZA
3 rue de Duras
75008 PARIS