О существовании 1-фактора у связного случайного графа [1])

П. Эрдёш, А. Реньи

0. Введение. В ряде статей (см. [1]—[3]) исследовалась структура случайного графа $\Gamma_{n,N}$, получаемого следующим образом: из $\binom{n}{2}$ возможных ребер, соединяющих n заданных вершин, выбираем наугад N ребер так, что каждый из $\binom{\binom{n}{2}}{N}$ возможных выборов имеет одну и ту же вероятность $\binom{\binom{n}{2}}{N}^{-1}$. Обозначим через C_0 класс связных графов, а через $P_{n,N}(A)$ — вероятность того, что граф $\Gamma_{n,N}$ принадлежит классу A. В статье [1] доказано, что если величины n и N стремятся к $+\infty$ так, что

$$N=\frac{1}{2}n\log n+cn+o(n), \tag{0.1}$$

то

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ N=\frac{1}{2}n\log n+cn+o(n)}} P_{n,N}(C_0)=e^{-e^{-2c}}. \tag{0.2}$$

Из (0.2) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,N}(C_0)=\begin{cases} 1, & \text{если } n\to\infty \text{ и } \dfrac{N-\frac{1}{2}n\log n}{n}\to+\infty,\\ 0, & \text{если } n\to\infty \text{ и } \dfrac{N-\frac{1}{2}n\log n}{n}\to-\infty. \end{cases} \tag{0.3}$$

Мы доказали также, что если C_k — класс всех графов, состоящих из связной компоненты и k изолированных вершин, то

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ N=\frac{1}{2}n\log n+cn+o(n)}} P_{n,N}(C_k)=\frac{\exp(-2kc-e^{-2c})}{k!}\quad (k=1,2,\ldots). \tag{0.4}$$

---

[1]) Erdös P., Rényi A., On the existence of a factor of degree one of a connected random graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.*, 17 (1966), 359—368.

Заметим, что величины, стоящие в правой части равенства (0.4), задают распределение Пуассона со средним e^{-2c}, и, таким образом, их сумма по $k = 0, 1, \ldots$ равна 1. Итак, если $N = (n/2)\log n + O(n)$, то с вероятностью, стремящейся к 1, случайный граф $\Gamma_{n, N}$ состоит из связной компоненты и некоторого числа изолированных вершин.

Говорят, что граф G имеет 1-*фактор*[1]), если можно выбрать такое подмножество S ребер графа G, что каждая вершина P графа G будет концевой для одного и только одного ребра из S. Ясно, что необходимое тривиальное условие наличия у графа 1-фактора заключается в том, чтобы число вершин графа было четным.

Согласно знаменитой теореме Татта [4], граф имеет 1-фактор тогда и только тогда, когда удаление произвольных r вершин графа G $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ приводит к графу G^*, у которого число связных компонент, содержащих нечетное число вершин, меньше $r + 1$.

Если граф G имеет четное число вершин, а граф G^*, получаемый из G в результате удаления r вершин (при этом удаляется также каждое ребро, инцидентное хотя бы одной удаленной вершине), содержит t нечетных компонент, то $t \equiv r \pmod 2$. Таким образом, теорему Татта можно сформулировать так: *граф G имеет 1-фактор тогда и только тогда, когда после удаления произвольных r $(r = 0, 1, 2, \ldots)$ вершин из G в полученном графе G^* число нечетных компонент среди связных компонент меньше $r + 2$.*

В настоящей статье нас интересует вероятность того, что случайный граф $\Gamma_{n, N}$ имеет 1-фактор.

Ясно, что граф, у которого есть хотя бы одна изолированная вершина, не может иметь 1-фактор. Согласно нашему результату [1], если $N = (n/2)\log n + cn + o(n)$, то случайный граф $\Gamma_{n, N}$ содержит изолированные вершины с вероятностью, не стремящейся к 0. Поэтому естественно рассматривать лишь случай

$$\frac{N - \frac{1}{2}n \log n}{n} \to +\infty;$$

конечно, предполагается также, что n четно, $n = 2m$. В п. 2 мы докажем, что в этом случае справедлива

Теорема 1. *Пусть n четно $(n = 2m)$ и*

$$N = \frac{1}{2} n \log n + \omega(n)\, n, \quad \text{где} \quad \lim_{n \to \infty} \omega(n) = +\infty. \tag{0.5}$$

---

[1]) Дословно *фактор первой степени, — Прим. перев.*

Если F — класс графов, имеющих 1-*фактор, то*

$$\lim_{n\to\infty} P_{n,N}(F) = 1. \tag{0.6}$$

Если $N = (n/2)\log n + O(n)$, то, как упоминалось выше, с вероятностью, близкой к 1, граф $\Gamma_{n,N}$ состоит из связной компоненты и некоторого числа изолированных вершин. Можно доказать (тем же методом, что и теорему 1), что если связная компонента графа $\Gamma_{n,N}$ содержит четное число вершин, то граф имеет 1-фактор с вероятностью, близкой к 1. Мы не будем вдаваться в детали доказательства этого утверждения, так как оно почти такое же, как и доказательство теоремы 1.

Следует заметить, что результаты настоящей работы тесно связаны с предыдущим нашим результатом (см. [5]) относительно случайных матриц, состоящих из 0 и 1. В самом деле, каждой такой матрице M порядка n соответствует двудольный граф G, состоящий из n «красных» и n «голубых» вершин, в котором никакие две вершины одинакового цвета не соединены ребром, а j-я красная вершина соединена ребром с k-й голубой вершиной тогда и только тогда, когда k-й элемент j-й строки матрицы M равен 1. Ясно, что граф G имеет 1-фактор тогда и только тогда, когда перманент[1]) матрицы M положителен; точнее: перманент матрицы M равен числу различных 1-факторов графа G.

В работе [5] мы доказали, что если случайная матрица $M_{n,N}$ порядка n, состоящая из 0 и 1, получается в результате случайного выбора с равномерным распределением одной из $\binom{n^2}{N}$ возможных $(n \times n)$-матриц, содержащих N единиц и $n^2 - N$ нулей, то вероятность того, что $M_{n,N}$ имеет положительный перманент, стремится к 1 при $n \to +\infty$ и $(N - n\log n)/n \to +\infty$. Согласно сказанному выше, этот результат можно интерпретировать подобно результату о наличии 1-фактора у двудольного графа, соответствующего матрице $M_{n,N}$. Добавим также, что задача, исследуемая в настоящей работе, гораздо труднее соответствующей задачи для двудольных графов, решенной в [5]. Так, например, в [5] мы использовали хорошо известную теорему Д. Кёнига, а здесь соответствующим инструментом является гораздо более глубокая теорема Татта, упомянутая выше.

---

[1]) Перманентом матрицы (a_{ij}) называется число $\sum \prod_{i=1}^{n} a_{i\pi(i)}$, где суммирование ведется по всем перестановкам π множества $\{1, \ldots, n\}$. — *Прим. перев.*

В п. 1 мы приводим некоторые простые соотношения, нужные в дальнейшем, а в п. 2 доказываем теорему 1.

1. Некоторые соотношения. Нам понадобятся следующие (хорошо известные или очевидные) соотношения:

$$\binom{n}{r} \leqslant \frac{n^r}{r!} \quad (r=1, 2, \ldots; n=r, r+1, \ldots). \tag{1.1}$$

$$\frac{x-a}{y-a} \leqslant \frac{x}{y} \quad \text{для} \quad 0 < a \leqslant x \leqslant y,\ a \neq y. \tag{1.2}$$

$$\frac{\binom{B-A}{b-a}}{\binom{B}{b}} \leqslant \left(1 - \frac{A-a}{B-a}\right)^{b-a} \left(\frac{b}{B}\right)^a, \tag{1.3}$$

если $0 \leqslant b-a \leqslant B-A$, $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant B$, $0 \leqslant A$.

$$1 - x \leqslant e^{-x}, \quad x \geqslant 0. \tag{1.4}$$

$$n! \geqslant \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad n \geqslant 1. \tag{1.5}$$

Если $\lambda > 1$, $0 < \delta < 1/\lambda e$, то

$$\sum_{n\delta\lambda e \leqslant r \leqslant n} \binom{n}{r} \delta^r = O\left(\frac{1}{\lambda^{\delta\lambda e n}}\right). \tag{1.6}$$

Если $0 < p < {}^1/_2$, то

$$\sum_{k \leqslant np} \binom{n}{k} = O\left(\sqrt{n} \cdot e^{nh(p)}\right), \tag{1.7}$$

где $h(p) = p \log(1/p) + (1-p) \log 1/(1-p)$. Если $0 < \alpha < 1$, $c > 0$, то

$$\sum_{\frac{nc}{\log n} \leqslant k} \binom{n}{k} \frac{1}{n^{\alpha k}} = e^{-\alpha c n + o(n)}. \tag{1.8}$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2} \leqslant e^{-x + x^2/3}, \quad 0 \leqslant x < 1. \tag{1.9}$$

$$\binom{n}{k} \leqslant \frac{n^k}{k!} e^{-k(k-1)/2n}, \quad 0 < k \leqslant n. \tag{1.10}$$

2. Доказательство теоремы 1. Доказательство состоит из 8 шагов. Характерная его черта — доказательство сначала некоторого более слабого утверждения, а затем усиление последнего.

Шаг 1. Пусть A_r — класс всех графов, из которых можно удалить r вершин так, что среди компонент оставшегося графа будет не менее $r+2$ нечетных. Через $o(1)$ обозначим величину, стремящуюся к 0, если n и N стремятся к $+\infty$ так, что выполняется условие (0.5).

Лемма 1.

$$\sum_{r\geqslant n\sqrt{\frac{2}{\log n}}} P_{n,N}(A_r)=o(1).$$

Доказательство. Рассмотрим граф G, принадлежащий классу A_r. Пусть в каждой из $r+2$ нечетных компонент выбрано по одной вершине. Ясно, что эти вершины не могут соединяться ребрами в графе G. Тогда для достаточно большого n в силу (1.3) и (1.4)

$$P_{n,N}(A_r)\leqslant\binom{n}{r+2}\frac{\binom{\binom{n}{2}-\binom{r+2}{2}}{N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}}\leqslant$$

$$\leqslant\binom{n}{r+2}\left(1-\frac{(r+2)(r+1)}{n(n-1)}\right)^N\leqslant\binom{n}{r+2}e^{-n},$$

откуда

$$\sum_{r\geqslant n\sqrt{\frac{2}{\log n}}} P_{n,N}(A_r)\leqslant\left(\frac{2}{e}\right)^n.$$

Шаг 2. Теперь докажем лемму 2.

Лемма 2.

$$\sum_{\frac{4n\log\log n}{\log n}\leqslant r<n\sqrt{\frac{2}{\log n}}} P_{n,N}(A_r)=o(1).$$

Доказательство. Согласно результатам работы [1], граф G можно считать связным, так как по условию (0.5) вероятность того, что граф $\Gamma_{n,N}$ не связен, равна $o(1)$. Предположим, что $\Gamma_{n,N}$ принадлежит классу A_r. Тогда, удаляя r вершин из $\Gamma_{n,N}$ (эти r вершин мы будем называть *разделяющими вершинами*), мы получаем граф, содержащий не менее $r+2$ нечетных компонент.

В каждой из этих компонент можно выбрать по крайней мере одну вершину, соединенную ребром с какой-нибудь разделяющей вершиной. Мы будем называть их *контактными вершинами*. Эти вершины, разумеется, между собою в $\Gamma_{n,N}$ не соединены ребрами. Далее, r разделяющих вершин можно выбрать $\binom{n}{r}$ способами, а контактные вершины в компонентах можно выбрать $\binom{n-r}{r+2}$ способами, причем каждая из них соединена ребром с какой-нибудь одной из r разделяющих вершин. Так как контактные вершины не соединены между собою ребрами, то для выбора оставшихся $N-(r+2)$ ребер графа имеется только $\binom{n}{2}-\binom{r+2}{2}$ возможностей.

Таким образом,

$$P_{n,N}(A_r)\leqslant\binom{n}{r}\binom{n-r}{r+2}r^{r+2}\frac{\binom{\binom{n}{2}-\binom{r+2}{2}}{N-(r+2)}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}},$$

а в силу (1.1) — (1.6)

$$\sum_{\frac{4n\log\log n}{\log n}\leqslant r<n\sqrt{\frac{2}{\log n}}}P_{n,N}(A_r)\leqslant$$

$$\leqslant\log^2 n\sum_{\frac{4n\log\log n}{\log n}<r}\binom{n}{r}\left(\frac{3}{\log n}\right)^r=O\left(e^{-n/\sqrt{\log n}}\right).$$

Шаг 3. Пусть $D(d)$ обозначает множество всех графов G, удовлетворяющих следующему условию: в множестве вершин графа G можно выбрать подмножество S_1, содержащее $k\geqslant d$ вершин, и подмножество S_2, содержащее $l\geqslant d$ вершин и не пересекающееся с S_1, причем ни одна вершина множества S_1 не соединена ребром в графе G ни с какой вершиной множества S_2.

Лемма 3.

$$P_{n,N}\left(D\left(n\sqrt{\frac{2}{\log n}}\right)\right)=o(1).$$

Доказательство. Ясно, что при достаточно больших значениях n

$$P_{n,N}\left(D\left(n\sqrt{\frac{2}{\log n}}\right)\right)\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k,\,l\geqslant n\sqrt{\frac{2}{\log n}}}\sum\binom{n}{k}\binom{n}{l}\frac{\binom{\binom{n}{2}-kl}{N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}}\leqslant\left(\frac{2}{e}\right)^{2n}.$$

Шаг 4. Нам потребуется

Лемма 4. *Если $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots a_s > 0$ — такая последовательность положительных чисел, что не существует номера j $(0 \leqslant j \leqslant s)$, для которого выполняются оба неравенства $a_0 + \ldots + a_j \geqslant B$ и $a_{j+1} + \ldots + a_s \geqslant B$, где $A = \sum_{i=0}^{s} a_i$ и $0 < B \leqslant A/3$, то $a_0 > A - B$.*

Доказательство. Если $B \leqslant a_0 \leqslant A - B$, то $a_1 + \ldots + a_s = A - a_0 \geqslant A - (A - B) = B$, что противоречит условию леммы. Итак, или $a_0 < B$, или $a_0 > A - B$. В первом случае пусть i определяется неравенствами $a_0 + \ldots + a_{i-1} < B \leqslant a_0 + \ldots + a_i$. Тогда $a_0 + \ldots + a_i < B + a_0 < 2B$ и, таким образом, $a_{i+1} + \ldots + a_s = A - (a_0 + \ldots + a_i) > A - 2B \geqslant B$, что опять-таки противоречит условию леммы. Следовательно, $a_0 > A - B$.

Пусть $\Gamma_{n, N}$ принадлежит классу A_r. В силу лемм 1 и 2 можно считать, что

$$r < \frac{4n \log \log n}{\log n}.$$

Пусть $a_0 \geqslant a_1 \geqslant \ldots \geqslant a_s$ $(s \geqslant r + 2)$ — количества вершин связных компонент в графе, получаемых после удаления из $\Gamma_{n, N}$ r разделяющих вершин. В силу леммы 3 последовательность $\{a_i\}$ удовлетворяет условиям леммы 4 с $A = n - r$ и $B = \sqrt{2n} / \sqrt{\log n}$. Тогда

$$a_0 > n - \frac{4n \log \log n}{\log n} - \frac{\sqrt{2}\, n}{\sqrt{\log n}}$$

и, значит,

$$a_1 + \ldots + a_s < \frac{4n \log \log n}{\log n} + \frac{\sqrt{2}\, n}{\sqrt{\log n}}.$$

Шаг 5. Докажем сначала, что справедлива

Лемма 5. *Пусть $H_n(k, r)$ — множество всех графов G, имеющих n вершин и удовлетворяющих условию: в множестве вершин графа G можно выбрать подмножество S_1, содержащее k вершин, и подмножество S_2, содержащее $n - k - r$ вершин и не пересекающееся с S_1, причем ни одна вершина из S_1 не соединена ребром в графе G ни с какой вершиной из S_2. Тогда если $0 < \delta < {}^1/_2$, $0 < \varepsilon < {}^1/_2$ и $c > h(\delta)/(1 - \varepsilon - \delta)$, то*

$$\sum_{\substack{\frac{cn}{\log n} < k < \varepsilon n \\ 0 \leqslant r < \delta n}} P_{n, N}(H_n(k, r)) = o(1).$$

Доказательство.

$$P_{n,N}(H_n(k,r)) \leqslant \binom{n}{k}\binom{n-k}{r}\frac{\binom{\binom{n}{2}-k(n-k-r)}{N}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} \leqslant$$

$$\leqslant \binom{n}{k}\binom{n}{r} e^{-\frac{k(n-k-r)}{n}\log n}.$$

Таким образом, в силу (1.7)

$$\sum_{\frac{cn}{\log n}<k<\varepsilon n}\sum_{0\leqslant r<\delta n} P_{n,N}(H_n(k,r)) = O\left(\sqrt{n}\, e^{nh(\delta)} \sum_{\frac{cn}{\log n}<k} \binom{n}{k}\frac{1}{n^{k(1-\varepsilon-\delta)}}\right),$$

а в силу (1.8)

$$\sum_{\frac{cn}{\log n}<k<\varepsilon n}\sum_{0\leqslant r<\delta n} P_{n,N}(H_n(k,r)) = O\left(\sqrt{n}\, e^{n(h(\delta)-c(1-\varepsilon-\delta))+o(n)}\right).$$

Лемма доказана.

Полагая в лемме 5

$$\delta = \frac{4\log\log n}{\log n}, \quad \varepsilon = \frac{4\log\log n}{\log n} + \sqrt{\frac{2}{\log n}},$$

заключаем: можно считать, что

$$a_1 + \ldots + a_s < \frac{8n\log\log^2 n}{\log^2 n},$$

так как вероятность выполнения противоположного неравенства стремится к 0. Теперь без ограничения общности можно предположить, что $s = r+1$ и все числа $a_1, \ldots, a_{r+1}$ нечетны. Таким образом, можно предположить, что

$$r+1 \leqslant a_1 + \ldots + a_{r+1} = k < \frac{8n\log\log^2 n}{\log^2 n}.$$

Шаг 6. Мы свели задачу к исследованию графов, имеющих $r < 8n\log\log^2 n/(\log^2 n)$ разделяющих вершин и таких, что после удаления этих вершин остается граф с $r+1$ нечетными компонентами с $a_1, \ldots, a_{r+1}$ вершинами, причем

$$k = a_1 + \ldots + a_{r+1} < \frac{8n\log\log^2 n}{\log^2 n}.$$

Обозначим через s число ребер, каждое из которых соединяет одну из разделяющих вершин с одной из k вершин, принадлежащих $r+1$ нечетным компонентам. Рассмотрим отдельно два случая: $s \geqslant r+8$ и $s < r+8$.

Пусть $s \geqslant r+8$. Ясно, что вероятность такого неравенства не превосходит

$$\Delta = \sum_{\substack{r < \frac{8n \log \log^2 n}{\log^2 n} \\ r+1 \leqslant k < \frac{8n \log \log^2 n}{\log^2 n}}} \binom{n}{r}\binom{n-r}{k} \sum_{r+8 \leqslant s \leqslant kr} \binom{kr}{s} \frac{\binom{\binom{n}{2} - k(n-k)}{N-s}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}}.$$

Используя неравенства (1.1)—(1.10), получаем

$$\Delta \leqslant \sum_{\substack{r < \frac{8n \log \log^2 n}{\log^2 n} \\ r+1 \leqslant k < \frac{8n \log \log^2 n}{\log^2 n}}} \sum \frac{n^{k+r}}{k!r!} \sum_{r+8 \leqslant s \leqslant kr} \binom{kr}{s}\left(\frac{\log n}{n}\right)^s \cdot \frac{1}{n^k} =$$

$$= O(n^{e^2-8}) = o(1).$$

Шаг 7. Рассмотрим случай $s \leqslant r+7$. Докажем, что можно предположить $k \leqslant s$, так как вероятность выполнения неравенства $k \geqslant s+1$ равна $o(1)$. На самом деле справедлива

Лемма 6. *Пусть E_k — множество всех графов, в каждом из которых содержится подмножество S из k вершин, соединенных не более чем $k-1$ ребрами с вершинами, лежащими вне S. Тогда*

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2 \log n}} P_{n,N}(E_k) = o(1).$$

Доказательство. Назовем подмножество вершин S графа G *слабо соединенным*, если оно имеет k вершин, а число ребер, соединяющих вершины из S с вершинами, лежащими вне S, меньше k. Назовем S *простым слабо соединенным множеством*, если оно само слабо соединенное, но ни одно из его собственных подмножеств этим свойством не обладает.

Легко видеть, что простое слабо соединенное множество порождает связный подграф. В самом деле, допустим, что S — простое слабо соединенное множество, которое можно разбить на такие два множества S_1 и S_2, что ни одно ребро графа G не соединяет вершину из S_1 с вершиной из S_2. Пусть k_1 и k_2 $(k_1+k_2=k)$ обозначают соответственно количества вершин в S_1 и S_2, а j_1 (соответственно j_2) обозначает число ребер, выходящих из множества S_1 (соответственно из S_2). По предположению множество S является простым слабо соединенным, что $j_1 \geqslant k_1$ и $j_2 \geqslant k_2$, откуда $j_1+j_2 \geqslant k$, а это т тому, что S — слабо соединенное множество.

Обозначим через E_k^* класс графов, содержащих простое слабо соединенное множество, состоящее из k элементов. Так как $\sum\limits_{k\leqslant K} E_k = \sum\limits_{k\leqslant K} E_k^*$, то достаточно доказать, что

$$\sum_{1\leqslant k\leqslant \frac{n}{2\log n}} P_{n,N}(E_k^*) = o(1).$$

Очевидно,

$$P_{n,N}(E_1^*) = o(1),$$

так как простое слабо соединенное множество, состоящее из одного элемента, является просто изолированной вершиной, а вероятность того, что в графе $\Gamma_{n,N}$ содержится изолированная вершина, стремится к 0 при $n\to\infty$ и $N=(n/2)\log n + n\omega(n)$, где $\omega(n)\to\infty$.

Осталось доказать, что

$$\sum_{2\leqslant k\leqslant \frac{n}{2\log n}} P(E_k^*) = o(1).$$

Ясно, что простое слабо соединенное множество, состоящее из двух элементов, есть пара вершин P_1, P_2, соединенных между собой ребром; кроме того, вершина P_1 соединена ребром с единственной другой вершиной P_3, а вершина P_2 не соединена ребром ни с какой вершиной, кроме P_1. Таким образом,

$$P_{n,N}(E_2^*) \leqslant n(n-1)(n-2)\frac{\binom{\binom{n}{2}-(2n-3)}{N-2}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} = O\left(\frac{\log^2 n}{n}\right).$$

Так как все связные графы с k вершинами содержат по крайней мере одно остовное дерево (имеющее $k-1$ ребер), а дерево с k вершинами можно построить k^{k-2} различными способами, то при $3\leqslant k\leqslant n/2\log n$

$$P_{n,N}(E_k^*) \leqslant$$

$$\leqslant \binom{n}{k} k^{k-2}\sum_{j=0}^{k-1}\binom{k(n-k)}{j}\frac{\binom{\binom{n}{2}-k(n-k)}{N-j-k+1}}{\binom{\binom{n}{2}}{N}} = O\left(\frac{\left(\frac{e^2\log^2 n}{n}\right)^{k-1}}{k^2}\right),$$

откуда

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{n}{2 \log n}} P_{n,\,N}(E_k^*) = o(1),$$

и лемма доказана.

Шаг 8. Мы свели задачу к изучению графов G следующего типа:

а) Из графа G можно удалить r разделяющих вершин, где $r \leqslant 8n(\log\log^2 n)/(\log^2 n)$, так, что оставшийся граф распадется на компоненты, среди которых будет ровно $r+1$ нечетных компонент $C_1, \ldots, C_{r+1}$ с количествами вершин $a_1, \ldots, a_{r+1}$ соответственно.

б) В графе G существуют s ребер, каждое из которых соединяет разделяющую вершину с вершиной, лежащей в одной из компонент $C_1, \ldots, C_{r+1}$, где $r+1 \leqslant s \leqslant r+7$.

в) $s \geqslant k$, где $k = a_1 + \ldots + a_{r+1}$.

Так как каждая из компонент C_j $(j = 1, \ldots, r+1)$ соединена по крайней мере с одной разделяющей вершиной и число таких вершин меньше, чем число компонент C_j, то найдутся две компоненты C_{i_1} и C_{i_2}, соединенные с одной и той же разделяющей вершиной P. Ясно, что сумма чисел a_{i_1} и a_{i_2}, равных количествам вершин компонент C_{i_1} и C_{i_2}, не может превышать 8. Сумма чисел b_1 и b_2, равных количествам ребер, выходящих соответственно из C_{i_1} и C_{i_2}, также не превышает 8. Таким образом, если K — класс графов, обладающих свойствами а), б), в), то

$$P_{n,\,N}(K) \leqslant \sum_{\substack{1 \leqslant a_{i_1} \leqslant 7 \\ 1 \leqslant a_{i_2} \leqslant 8 - a_{i_1} \\ 1 \leqslant b_1 \leqslant 7 \\ 1 \leqslant b_2 \leqslant 8 - b_1}}\sum n \binom{n}{a_i}\binom{n}{a_{i_2}}\binom{n a_{i_1}}{b_1 - 1}\binom{n a_{i_2}}{b_2 - 1} \times$$

$$\times \frac{\dbinom{\binom{n - a_{i_1} - a_{i_2}}{2}}{N - b_1 - b_2}}{\dbinom{\binom{n}{2}}{N}},$$

откуда

$$P_{n,\,N}(K) = O\left(\frac{\log^8 n}{n}\right).$$

Теорема 1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Erdös P., Rényi A., On random graphs. I, *Publ. Math. (Debrecen)*, **6** (1959), 290—297.
2. Erdös P., Rényi A., On the evolution of random graphs, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **5A** (1960), 17—61.
3. Erdös P., Rényi A., On the strength of connectedness of a random graph, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.*, **12** (1961), 261—267.
4. Tutte W. T., The factorization of linear graphs, *J. London Math. Soc.*, **22** (1947), 107—111.
5. Erdös P., Rényi A., On random matrices, *Publ. Math. Inst. Hung. Acad. Sci.*, **8A** (1963), 455—461.