Seperatum
ELEMENTE DER MATHEMATIK
BIRKHÄUSER VERLAG, BASEL, SCHWEIZ
Vol. 28/4, 1973

Über die Zahlen der Form $\sigma(n) - n$ und $n - \varphi(n)$

Dem Andenken von Waclaw Sierpiński gewidmet

Ich traf Professor Sierpiński zuerst im August 1955 bei einer mathematischen Tagung in Prag. Sierpiński war damals schon mehr an der elementaren Zahlentheorie interessiert als an der Mengenlehre. Wir diskutierten über die Eulersche φ-Funktion und vermuteten, dass für unendlich viele m die Gleichung

$$n - \varphi(n) = m \tag{1}$$

unlösbar ist. Diese Vermutung ist noch immer unentschieden, ich werde aber zeigen, dass für unendlich viele Werte von m

$$\sigma(n) - n = m \tag{2}$$

unlösbar ist. Wir beweisen einen etwas stärkeren

Satz I. Die untere Dichte[1]) der Zahlen m, für welche (2) unlösbar ist, ist positiv.

Bevor wir unseren Satz beweisen, wollen wir einige Besonderheiten unserer Vermutung besprechen. Es sei $n = p\,q$, wo p und q verschiedene ungerade Primzahlen sind. Offenbar ist

$$n - \varphi(n) = p + q - 1\,.$$

[1]) Ist $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ eine unendliche Folge natürlicher Zahlen und $A(n)$ die Anzahl der $a_i \le n$, so ist für $n \to \infty$ $\underline{d} = \underline{\lim}\ A(n)/n$ die untere und $\overline{d} = \overline{\lim}\ A(n)/n$ die obere Dichte der Folge. Ist $\underline{d} = \overline{d} = d$, so wird d die (asymptotische) Dichte der Folge genannt.

Wenn die (leicht modifizierte[2])) Goldbachsche Vermutung wahr ist, so ist jede ungerade Zahl in der Form (1) darstellbar, und jede ungerade Zahl $\neq 5$ ist in der Form (2) darstellbar. Van der Corput, Esterman und Tchudakoff zeigten, dass die geraden Zahlen, die nicht Summe zweier Primzahlen sind, die Dichte 0 haben, daher sind fast alle ungeraden Zahlen in der Form (1) und (2) darstellbar. Die kleinste gerade Zahl, die nicht in der Form $n - \varphi(n)$ darstellbar ist, ist 14. 2 und 4 sind nicht in der Form $\sigma(n) - n$ darstellbar. Man könnte ohne grosse Mühe alle Zahlen bis 10^6 bestimmen, die nicht in deɪ Form (1) und (2) darstellbar sind. I. Ruzsa vermutete, dass die Dichte der Zahlen, die nicht in der Form (1) darstellbar sind, 0 ist, es ist aber nicht einmal bekannt, ob die obere Dichte dieser Zahlen grösser als $^1/_2$ ist oder ob die Dichte der in der Form (1) und (2) darstellbaren Zahlen überhaupt existiert.

Die Zahlen der Form $\varphi(n)$ und $\sigma(n)$ sind viel leichter zu studieren. $A_\varphi(x)$ sei die Anzahl der Zahlen $m \leq x$, die sich in der Form $\varphi(n)$ darstellen lassen, und $A_\sigma(x)$ sei analog für $\sigma(n)$ definiert. Pillai zeigte, dass $A_\varphi(x) = o(x)$ ist, und ich zeigte, dass für jedes ε und $x > x_0(\varepsilon)$

$$A_\varphi(x) < \frac{x}{\log x} (\log x)^\varepsilon \tag{3}$$

gilt (P. Erdös, Quarterly Journal of Math. 1935). Kürzlich zeigten R.R. Hall und ich, dass

$$A_\varphi(x) < \frac{x}{\log x} \exp c(\operatorname{loglog} x)^{0,5} \tag{4}$$

ist; unser Beweis ist noch nicht veröffentlicht. Weiter zeigte ich (Bull. Amer. Math. Soc. 1945)

$$A_\varphi(x) > \frac{c\,x}{\log x} \operatorname{loglog} x\,. \tag{5}$$

(5) lässt sich wohl noch auf $A_\varphi(x) > (c\,x/\log x)\,(\operatorname{loglog} x)^k$ für jedes k und $x > x_0(k)$ verschärfen.

Weiter zeigte ich (Quarterly Journal 1935), dass ein $c > 0$ existiert, so dass für unendlich viele m die Gleichung $\varphi(n) = m$ mehr als m^c Lösungen hat. Sicherlich gilt dies für jedes $c > 1$, aber wir sind weit entfernt davon, dies zeigen zu können.

Die hier erwähnten Sätze gelten alle auch für $\sigma(n)$. Ich weiss aber nicht, ob $A_\varphi(x) - A_\sigma(x)$ unendlich viele Zeichenwechsel hat und ob $\lim_{x\to\infty} A_\varphi(x)/A_\sigma(x)$ existiert und 1 ist; diese Fragen sind wahrscheinlich recht schwierig. Ich weiss auch nicht, ob $\varphi(n) = \sigma(m)$ unendlich viele Lösungen hat.

Nun beweisen wir unseren Satz. Es sei $P_k = 2.3\ldots p_k$ das Produkt der ersten k Primzahlen. Wir beweisen den folgenden stärkeren

Satz II. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein k, so dass für alle $x > x_0(\varepsilon, k)$ die Anzahl $A(k, x)$ der Zahlen $n \neq p$, für welche

$$\sigma(n) - n \leq x\,, \quad \sigma(n) - n \equiv 0 \pmod{P_k} \tag{6}$$

gilt, kleiner als $\varepsilon\,x/P_k$ ist.

[2]) Jede gerade Zahl > 6 ist die Summe zweier *verschiedener* Primzahlen.

Aus Satz II folgt, dass die obere Dichte der Zahlen $m \equiv 0 \pmod{P_k}$ von der Form (2) höchstens $\varepsilon/P_k < 1/P_k$ ist. Wäre die untere Dichte der nicht in der Form (2) darstellbaren Zahlen 0, so wäre die obere Dichte der Zahlen der Form (2) 1 und die obere Dichte der durch P_k teilbaren unter ihnen $\geq 1/P_k$. Daher folgt Satz I aus Satz II.

Offenbar gilt

$$A(k, x) = A_1(k, x) + A_2(k, x) + A_3(k, x)\,, \tag{7}$$

wo $A_1(k, x)$ die Anzahl der Lösungen von (6) mit $n \equiv 1 \pmod 2$, $A_2(k, x)$ die Anzahl der Lösungen von (6) mit $n \equiv 0 \pmod 2$, $n \not\equiv 0 \pmod{P_k}$ und $A_3(k, x)$ die Anzahl der Lösungen von (6) mit $n \equiv 0 \pmod{P_k}$ bedeutet. Zuerst zeigen wir

$$A_1(k, x) = o(x) \tag{8}$$

und

$$A_2(k, x) = o(x)\,. \tag{9}$$

Aus $n \equiv 1 \pmod 2$, $\sigma(n) - n \equiv 0 \pmod 2$, folgt $\sigma(n) \equiv 1 \pmod 2$. Daher ist $n = t^2$. Wenn t Primzahl ist, folgt $\sigma(n) - n > \sqrt{n}$, also wegen $\sigma(n) - n \leq x$, $n < x^2$, $t < x$. Wenn t nicht Primzahl ist, gilt $\sigma(n) - n > n^{3/4}$ (da der kleinste Primfaktor eines quadratischen n nicht grösser als $n^{1/4}$ ist und daher $n\,p^{-1} \geq n^{3/4}$ gilt). Daher folgt aus $\sigma(n) - n \leq x$, dass $n < x^{4/3} < x^{3/2}$ und $t < x^{3/4}$. Also $A_1(k, x) \leq \pi(x) + x^{3/4} = o(x)$, womit (8) bewiesen ist.

Jetzt wollen wir (9) beweisen. Hier gilt $n \equiv 0 \pmod 2$, also ist $\sigma(n) \geq 3\,n/2$. Daher folgt aus $\sigma(n) - n \leq x$, dass $n \leq 2\,x$. Wir benötigen nun folgendes:

Lemma. Es sei p eine beliebige Primzahl. Die Dichte der Zahlen n mit $\sigma(n) \not\equiv 0 \pmod p$ ist 0.

Das Lemma ist wohlbekannt. Der Vollständigkeit wegen werden wir es aber im Anhang beweisen. Aus unserem Lemma folgt sofort, dass die Anzahl der Zahlen $n \leq 2\,x$ mit $\sigma(n) \not\equiv 0 \pmod{P_k}$ $o(x)$ ist. Wegen (6) und $n \not\equiv 0 \pmod{P_k}$ folgt aber $\sigma(n) \not\equiv 0 \pmod{P_k}$, daher folgt (9) sofort aus $n \leq 2\,x$.

Schliesslich wollen wir $A_3(k, x)$ abschätzen. Wegen $n \equiv 0 \pmod{P_k}$ folgt

$$\sigma(n) \geq n \prod_{l=1}^{k} \left(1 + \frac{1}{p_l}\right) > \left(\frac{2}{\varepsilon} + 1\right) n$$

für $k > k_0(\varepsilon)$, da $\sum_{l=1}^{\infty} 1/p_l = \infty$. Daher folgt aus $\sigma(n) - n \leq x$, dass $n < \varepsilon\,x/2$, also

$$A_3(k, x) < \frac{\varepsilon}{2}\,\frac{x}{P_k}\,. \tag{10}$$

Satz II folgt sofort aus (8), (9) und (10). Leider lässt sich diese einfache Methode nicht auf $n - \varphi(n)$ anwenden.

Folgende Frage konnte ich weder für $\varphi(n)$ noch für $\sigma(n)$ beantworten. Ist es wahr, dass für jedes $c > 1$ und $t > 1$ Zahlen m_1 und m_2 existieren mit $\sigma(m_1) > c\,m_1$, $\varphi(m_2) < m_2/c$, so dass die Gleichungen

$$\sigma(n) - n = m_1\,, \quad n - \varphi(n) = m_2$$

mindestens t Lösungen haben.

Anhang (Beweis des Lemmas). Es seien $q_1, q_2, \ldots$ die Primzahlen mit $q_i \equiv -1 \pmod{p}$. Nach dem Dirichletschen Satz gilt $\sum q_i^{-1} = \infty$. Somit divergiert die Reihe $\sum v_i$ mit $v_i = (q_i - 1)\, q_i^{-2}$. Das unendliche Produkt $\Pi\,(1 - v_i)$ strebt daher gegen Null. Man kann also $\eta > 0$ beliebig und r so gross wählen, dass

$$\prod_{i=1}^{r} (1 - v_i) < \eta/2\,. \tag{11}$$

Wenn für irgend ein i $q_i \mid n$ und $q_i^2 \nmid n$ gilt, so folgt $\sigma(n) \equiv 0 \pmod{p}$. Nun sei $B_r = \prod_{i=1}^{r} q_i$. Wenn für ein u in $1 \leq u < B_r^2$ und ein $i \leq r$ $q_i \mid u$ und $q_i^2 \nmid u$ gilt, dann folgt aus $n \equiv u \pmod{B_r^2}$, dass $\sigma(n) \equiv 0 \pmod{p}$. Für die Anzahl der Restklassen $u \pmod{B_r^2}$, die diese Eigenschaft *nicht* haben, erhält man sofort aus dem Sieb des Eratosthenes den Ausdruck

$$B_r^2 \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{q_i - 1}{q_i^2}\right),$$

der nach (11) $< 0{,}5\, \eta\, B_r^2$ ist. Daher ist für $x > x_0(\eta, r)$ die Anzahl der Zahlen $n \leq x$ mit $\sigma(n) \not\equiv 0 \pmod{p}$ kleiner als

$$0{,}5\, \eta\, B_r^2 \cdot x\, B_r^{-2} + 0{,}5\, \eta\, B_r^2 < \eta x\,. \tag{12}$$

Da (12) für jedes $\eta > 0$ gilt, ist der Beweis fertig.

P. Erdös