HILBERT TÉRBEN LEVŐ PONTHALMAZOK NÉHÁNY GEOMETRIAI ÉS HALMAZELMÉLETI TULAJDONSÁGÁRÓL

ERDŐS PÁL

Legyen H egy m számosságú ponthalmaz az n-dimenziós térben. A H ponthalmaz T-tulajdonságú, ha bármely két pontja közötti távolság különböző — azaz, ha bármely négy pontja hat különböző távolságot határoz meg. A kontinuumhipotézis felhasználása nélkül bebizonyítottam [1], hogy ha H tetszőleges m számosságú ponthalmaz az n-dimenziós térben, akkor mindig van oly $H_1 \subset H$, melyre $|H_1| = |H| = m$, s melynek megvan a T tulajdonsága [2]. ($|H|$ a H halmaz számosságát jelenti.) Világos, hogy e tétel nem vihető át a Hilbert térre [1]. Legyen ugyanis $z_1, z_2, \dots$ végtelen sok pont a Hilbert-térben, z_n n-edik koordinátája 1, a többi koordinátája 0 (azaz $z_n = \{x_1, x_2, \dots,\}$) ahol $x_n = 1$, $x_i = 0$, ha $i \neq n$. Világos, hogy $d(z_i, z_j) = \sqrt{2}$ minden $1 \leqq i < j$ esetén. Első pillanatban remélhető lenne, hogy nem megszámlálható halmazokra tételünk talán igaz marad. Oxtoby és én azonban kimutattuk, hogy ha P a pozitív valós számoknak tetszés szerinti mindenütt sűrű halmaza, akkor mindig van a Hilbert-térben olyan $\aleph_1$ számosságú H halmaz (H ezen túl mindig a Hilbert-tér egy részhalmazát jelenti), melyre $D(H) \subset P$, ahol $D(H)$ az összes $d(x, y)$, $X \in H$, $y \in H$ számok halmazát jelenti. Kakutanival azt is kimutattuk, hogy van olyan kontinuumnyi számosságú H, melyre $D(H)$ minden eleme egy racionális szám négyzetgyöke. Ki fogjuk továbbá mutatni, hogy van olyan H, melyre $|H| = c$ és H minden háromszöge egyenlőszárú.

Régebben egyszer azt állítottam, hogy van oly H, melyre $|H| = c$ és $D(H)$ minden eleme racionális [2]. Ezt az állítást azonban nem tudom bebizonyítani. Általában a kontinuum-hipotézis feltevése nélkül nem tudjuk eldönteni, hogy ha P tetszőleges, mindenütt sűrű halmaza a pozitív valós számoknak, akkor van-e oly H, melyre $D(H) \subset P$ és $|H| = c$? Ha feltesszük, hogy $c = \aleph_1$, akkor Oxtobyval való tételünk szerint van ilyen H.

A következőkben ismertetem e tételek egyszerű bizonyítását.

I. tétel. Van oly H, melyre $|H| = c$ és $D(H)$ minden eleme egy racionális szám négyzetgyöke.

H konstrukciójához felhasználjuk a következő ismert tételt [3]: Létezik az egész számoknak kontinuumnyi sok részhalmaza, hogy bármely kettőnek közös része véges. E tételre több egyszerű bizonyítás adható — talán a legegyszerűbb a következő, melyet Rényi Alfréd közölt velem. Legyen $1 < \alpha < 2$ tetszés szerinti

[1] Hilbert téren itt az olyan $\{x_1, x_2, \dots\}$ valós számokból álló sorozatok terét értjük, melyre $\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty$. Az $\{x_1, \dots\}$ és $\{y_1, \dots\}$ pontok közötti $d(x, y)$ távolság $\sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (x_i - y_i)^2}$.

valós szám. Az A_α sorozat elemei az $\alpha_n^{(\alpha)}=[2^n\alpha]$, $n=1, 2, \ldots$ egész számok ($[x]$ x egész részét jelenti). Nyilván $a_n^{(\alpha)}\neq a_m^{(\beta)}$, ha $n\neq m$, és $1<\alpha$; $\beta<2$. Ha $\alpha<\beta$, akkor világos, hogy elegendő nagy n-re $[2^n\alpha]<[2^n\beta]$. E két megjegyzésből azonnal következik, hogy $A_\alpha\cap A_\beta$ véges.

Mármost a H halmaz z_α, $1<\alpha<2$ pontjait következőképpen konstruáljuk: a z_α pont $a_n^{(\alpha)}$-adik koordinátája $\frac{1}{2^n}$, $n=1, 2, \ldots$. A többi koordináta 0. Könnyű belátni, hogy $d(z_\alpha, z_\beta)^2$ racionális szám (ugyanis $\sum_{n=1}^{\infty} 1/2^{2n}$ racionális, s e szám racionális marad, ha az összegből véges sok tagot elhagyunk). Ezzel tételünk igazolva van.

Könnyű belátni továbbá, hogy H halmazunk bármely háromszöge egyenlőszárú és hegyesszögű. Hogy ezt beláthassuk, megjegyezzük, hogy ha $A_\alpha\cap A_\beta$ nem üres, akkor van egy n, hogy $a_m^{(\alpha)}=a_m^{(\beta)}$ $1\leqq m\leqq n$ esetén, de $a_m^{(\alpha)}\neq a_m^{(\beta)}$, ha $m>n$ (azt már megjegyeztük, hogy $a_{m_1}^{(\alpha)}\neq a_{m_2}^{(\beta)}$, ha $m_1\neq m_2$, azaz, ha az A_α és A_β sorozatok egyszer elváltak, akkor attól a helytől kezdve diszjunktak.) Legyen mármost z_{α_1}, z_{α_2}, z_{α_3} három pontunk, s legyen $d(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2})$ a háromszög legkisebb oldala, vagyis a z_α-ák definíciója miatt az $A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}$ halmaz számossága a legnagyobb; ebből azonban nyilván következik, hogy $|A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}|\geqq|A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_3}|=|A_{\alpha_2}\cap A_{\alpha_3}|$, azaz

$$(1)\qquad d(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}) = d(z_{\alpha_2}, z_{\alpha_3})\geqq d(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_3}).$$

(1) miatt a $(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, z_{\alpha_3})$ háromszög egyenlőszárú és hegyesszögű.

Legyen $|H|>\aleph_0$. Akkor minden $\varepsilon>0$-hoz van három pont H-ban, hogy az általuk meghatározott háromszög legnagyobb szöge nagyobb, mint $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$. Valóban, a Hilbert-tér szeparabilitásából azonnal következik, hogy H-nak van egy sűrűsödési pontja, mondjuk z. Legyen z_{α_1} tetszőleges, z_{α_2} és z_{α_3} H-nak két z-hez elegendően közel levő pontja, akkor nyilván a $(z_{\alpha_1}, z_{\alpha_2}, z_{\alpha_3})$ háromszög z_{α_1}-nél levő szöge $<2\varepsilon$, ezért háromszögünk legnagyobb szöge nagyobb, mint $\frac{\pi}{2}-\varepsilon$.

II. tétel. Legyen P pozitív számok tetszés szerinti mindenütt sűrű halmaza. Akkor van oly H, melyre $|H|=\aleph_1$ és $D(H)\subset P$.

Valamivel élesebb tételt fogunk bizonyítani. Ki fogjuk mutatni, hogy létezik oly H, melyre $|H|=\aleph_1$, $D(H)\subset P$ és továbbá minden véges $k>2$-re H bármely k eleme lineárisan független, azaz nincs H-nak k olyan pontja, mely a Hilbert-tér egy $(k-2)$-dimenziós alterében van.

H-t transzfinit indukcióval konstruáljuk meg. Tegyük fel, hogy már konstruáltunk egy véges vagy megszámlálható H_1 halmazt, melyre $D(H_1)\subset P$, s melynek elemei lineárisan függetlenek. Minthogy H_1 véges vagy megszámlálható, pontjait elrendezhetjük egy $z_1, z_2, \ldots$ véges vagy ω-típusú sorozatba. Most bebizonyítjuk, hogy mindig található a Hilbert-térben olyan z pont, melyre $d(z, z_n)$ P-ben van minden n-re, továbbá bármely $k\geqq 2$-re és $z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ minden választása mellett $z, z_{i_1}, \ldots, z_{i_k}$ nincs a Hilbert-tér egy $(k-1)$-dimenziós alterében. Ha ilyen z létezését bebizonyítottuk, akkor transzfinit indukcióval könnyen következik, hogy van oly H, melyre $|H|=\aleph_1$, $D(H)\subset P$, továbbá minden véges $k\geqq 3$-ra H bármely k eleme lineárisan független — azaz a II. tételt bebizonyítottuk.

Így tehát csak a fenti tulajdonságokkal rendelkező z létezését kell bebizonyítanunk. Jelölje $r(z_i, p_i)$ a Hilbert-tér azon pontjainak halmazát, melyek távolsága

z-től p_i. Tegyük fel, hogy $1 \leqq i \leqq n$-re már megválasztottuk a $p_i \in P$ számokat úgy, hogy az $R_n = \bigcap_{i=1}^{n} r(z_i, p_i)$ halmaz átmérője pozitív, de kisebb, mint $1/2^n$. Egyszerű geometriai meggondolás mutatja, hogy R_n egyetlen pontja sincs a $z_1, \ldots, z_n$ pontok által feszített altérben. Ha a Hilbert tér z pontja a $z_1, \ldots, z_n$ pontok által feszített lineáris térben van, akkor R_n minden pontja egyenlő távol van z-től, ha viszont z nincs e lineáris térben, akkor a $d(z, u)$, $u \in R_n$ számok nyilván egy intervallumot alkotnak. Minthogy feltevésünk szerint z_{n+1} sincs a $z_1, \ldots, z_n$ által feszített altérben, a $d(z_{n+1}, u)$, $u \in R_n$ számok egy intervallumot alkotnak. Minthogy P ezen intervallumban mindenütt sűrűn van, egyszerű geometriai meggondolásból következik, hogy van oly $p_{n+1} \in P$ melyre az $R_n \cap r(z_{n+1}, p_{n+1})$ halmaz átmérője pozitív, de kisebb, mint $\frac{n}{2}+1$. Az R_n $n = 1, 2, \ldots$ halmazoknak közös része nem üres. Ha a $z_1, \ldots$ pontok száma véges, akkor ez nyilvánvaló, minthogy minden n-re az egymásba skatulyázott halmazoknak pozitív az átmérője. Ha a $z_1, \ldots$ pontok száma végtelen, akkor a Hilbert-tér teljessége miatt $\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ egyetlen pontból áll. Legyen mármost $z \in R_n$ minden n-re. Nyilván $d(z, z_n) \in P$ minden n-re és minthogy R_n egyetlen pontja sincs a $z_1, \ldots, z_n$ pontok által feszített altérben, rögtön nyerjük, hogy minden $n > 2$-re z sincs a $z_{i_1}, \ldots, z_{i_n}$ által feszített altérben. Ezzel a kívánt z létezése és így a II. tétel be van bizonyítva.

A II. tétel bizonyításánál használt módszer nyilván nem alkalmas annak eldöntésére, van-e egy kontinuumnyi számosságú H halmaz úgy, hogy $D(H) \subset P$.

Egy Rado-val való tételemből [4] azonnal következik, hogy ha $z_1, \ldots$ végtelen sok pont a Hilbert-térben, akkor mindig van egy végtelen részsorozat, $z_{i_1}, \ldots$, melyre a következő négy eset valamelyike teljesül: 1. bármely két z_{i_j} közötti távolság különböző (azaz a $z_{i_1}, \ldots$ halmaznak megvan a T tulajdonsága), 2. bármely két z_{i_j} közötti távolság egyenlő, 3. legyen $r < s$, $u < v$, $d(z_{i_r}, z_{i_s}) = d(z_{i_u}, z_{i_v})$ akkor és csakis akkor, ha $r = u$, 4. $d(z_{i_r}, z_{i_s}) = d(z_{i_u}, z_{i_v})$ akkor és csakis akkor, ha $s = v$.

Nem sikerült eldöntenem a következő kérdést: Legyen $|H| = m > \aleph_0$. Igaz-e, hogy van oly $H_1 \subset H$, $|H_1| = m$, mely nem tartalmaz egyenlőoldalú háromszöget?

IRODALOM

[1] A kontinuumhipotézisre vonatkozólag lásd: W. Sierpinski, Hypothèse du continu, Warszawa—Lwów, 1934, továbbá Hajnal András, A kontinuum-problémára és a kiválasztási axiómára vonatkozó axiomatikus vizsgálatok történetéről és jelenlegi állásáról, Mat. Lapok 17 (1966) 253—260.

[2] *P. Erdős,* Some remarks on set theory, Proc. Amer. Math. Soc. 1 (1950), 127—141 (lásd 130—132).

[3] Ezen kérdésnek kiterjedt irodalma van, lásd pl. A. Tarski, Sur la décomposition des ensembles en sous ensembles presque disjoint, Fund. Math. 14 (1929) 205—215.

[4] *P. Erdős* and *R. Rado,* A combinatorial theorem, J. London Math. Soc. 26 (1950) 249—255.

О НЕКОТОРЫХ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ И ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ СВОЙСТВАХ ТОЧЕЧНЫХ МНОЖЕСТВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

П. ЭРДЁШ

GEOMETRICAL AND SET-THEORETICAL PROPERTIES OF SUBSETS OF HILBERT-SPACE

P. ERDŐS

The author proved in a previous paper without assuming the continuum-hypothesis that if S is a subset of n-dimensional space then S contains a subset S_1 of power m so that all the distances between points of S_1 are distinct. Oxtoby, Kakutani and the author showed that if P is any denumerable dense set of positive numbers then there is a set H in Hilbert space of power $\aleph_1$ so that all the distances between points in H are in P, further there is a set H_1 of power C in Hilbert space so that all the distances between points in H_1 is the square root of a rational number. We do not know if all the distances can be rational.

Is it true that if H is a set of power m in Hilbert space then H has a subset of power m which does not contain an equilateral triangle?