KROMATIKUS GRÁFOKRÓL

ERDŐS PÁL ÉS HAJNAL ANDRÁS

Egy G gráfot akkor nevezünk k-kromatikusnak $(\varkappa(G)=k)$, ha szögpontjait be lehet osztani k osztályba úgy, hogy két egy osztályba eső pont sincsen összekötve, s $k-1$ ilyen osztályba a szögpontokat nem lehet beosztani. Ha m végtelen számosság, akkor G-t akkor nevezzük m-kromatikusnak, ha szögpontjait be lehet osztani m olyan osztályba, hogy két egy osztályba eső pont sincs összekötve, de ha $n<m$, akkor n ilyen osztályba a szögpontokat már nem lehet beosztani. Ha G tartalmaz egy k pontból álló teljes gráfot, akkor kromatikus száma nyilván legalább k. Tutte, Zykov és Ungár [10] egymástól függetlenül bebizonyították, hogy minden k-ra van oly k-kromatikus gráf, mely nem tartalmaz háromszöget. Erdős [3] valószínűségszámítási módszerekkel bebizonyította, hogy minden k és l-re van k-kromatikus gráf, melynek minden köre legalább l élű. Lovásznak sikerült ezt nemrég egy direkt konstrukcióval kimutatnia. Erdős és Rado [4] bebizonyították, hogy ha $m \geqq \aleph_0$ tetszés szerinti végtelen számosság, akkor mindig van oly G gráf, melyben a szögpontok számossága m, a gráf nem tartalmaz háromszöget, s m-kromatikus. A szerzők [5] nemrég bebizonyították, hogy e tétel a következőképpen élesíthető: Legyen $m \geqq \aleph_0$ és l tetszőleges adott szám, akkor van m szögpontú gráf, melynek legkisebb páratlan köre legalább $2l+1$ élt tartalmaz, s mely m-kromatikus. Igen érdekes jelenség ezzel szemben a következő [5]: Legyen G tetszés szerinti számosságú gráf, mely nem tartalmaz négyszöget (azaz 4 élű kört), akkor $\varkappa(G) \leqq \aleph_0$. ([3]-ból viszont rögtön következik, hogy minden l-re van oly G, melynek minden köre legalább l élű, s melyre $\varkappa(G)=\aleph_0$.)

Ezen eredmények mutatják, hogy egy gráf kromatikus száma lehet $\aleph_0$, bár a gráf nem tartalmaz kis kört. E cikkben egy más természetű idevágó kérdéssel fogunk foglalkozni. Előbb néhány egyszerű fogalmat kell bevezetnünk. Legyenek $x_1, \ldots, x_m$ a G gráf tetszés szerinti szögpontjai. $G(x_1, \ldots, x_m)$ legyen az $x_1, \ldots, x_m$ szögpontok által feszített részgráf (azaz $G(x_1, \ldots, x_m)$-ben x_i és x_j, akkor és csakis akkor vannak éllel összekötve, ha G-ben is össze vannak kötve). G szögpontjainak egy részhalmazát akkor nevezzük függetlennek, ha az általuk feszített részgráfnak nincsen éle (azaz, ha semmilyen szögpont sincs éllel összekötve). $f(G)$ jelentse a G legnagyobb független halmazának számosságát, feltéve, hogy ez véges, — azaz más szóval: G-nek van $f(G)$ szögpontból álló független részhalmaza, de már $f(G)+1$ szögpontú független részhalmaza nincsen. Egy G gráfról akkor mondjuk, hogy megvan a T_c tulajdonsága, ha minden véges m-re és minden $x_1, \ldots, x_m$ szögpontra $f(G(x_1, \ldots, x_m)) \geqq cm$. Első pillanatban úgy gondolhatnánk, hogy ha G-nek megvan a T_c tulajdonsága, akkor $\varkappa(G)$ sem lehet nagy. $c \geqq \frac{1}{2}$-re ez majdnem nyilvánvaló. Ha ugyanis G-nek megvan a $T_{\frac{1}{2}}$ tulajdonsága, akkor G-nek nem lehet páratlan köre, ti. ha $x_1, \ldots, x_{2l+1}$ G-nek egy páratlan köre lenne, akkor nyilván $f(G(x_1, \ldots,$

..., $x_{2l+1})) \leqq l$, s ezért G-nek nincs meg a $T_{\frac{1}{2}}$ tulajdonsága. Ezzel kimutattuk, hogy ha G-nek megvan a $T_{\frac{1}{2}}$ tulajdonsága, akkor páros körüljárású, s így $\varkappa(G) \leqq 2$. Ezek után talán meglepő, hogy fennáll a következő

TÉTEL. *Minden $c < \frac{1}{2}$-hez és minden k számhoz van oly G, mely kielégíti a T_c tulajdonságot, s melyre $\varkappa(G) > k$.*

Gráfunk szögpontjai a k-dimenziós egységgömb pontjai lesznek. Legyen $\varepsilon = \varepsilon(c)$ elegendő kis pozitív szám. Két pontot akkor kötünk össze éllel, ha távolságuk nagyobb, mint $2-\varepsilon$. Ha $\varepsilon < 2-\sqrt{3}$, akkor gráfunk nem tartalmaz háromszöget, mert minden, egy legfeljebb egységsugarú körbe írható háromszögnek, legalább az egyik oldala $\leqq \sqrt{3}$. Könnyű belátni viszont, hogy gráfunk kromatikus száma $> k$. G minden független halmazának átmérője ugyanis nyilván $\leqq 2-\varepsilon$. Borsuk [1] egy ismert tétele szerint viszont, ha a k-dimenziós egységgömb felületét k halmaz egyesítési halmazára bontjuk, akkor legalább az egyik halmaz átmérője 2 (azaz legalább az egyik halmaz zárt burka tartalmaz diametrálisan ellentett pontokat). Így egy egyszerű bizonyítást nyertünk a Tutte—Zykov—Ungár tételre.

Most bebizonyítjuk, hogy elegendő kis ε-ra gráfunknak megvan a T_c tulajdonsága. Más szóval ki fogjuk mutatni, hogy ha $x_1, \dots, x_n$ a k-dimenziós egységgömb felületének tetszőleges pontjai, akkor ezen n pont közül van $m > cn$ olyan $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$, hogy bármely két x_{i_j} távolsága $\leqq 2-\varepsilon$, ti. ezen esetben ez az m pont független. Ezen m pontot egy igen egyszerű átlagolási módszerrel fogjuk megkonstruálni. Elég lesz bebizonyítanunk, hogy van olyan $2-\varepsilon$ átmérőjű gömbsüveg, mely több, mint cn x_i pontot tartalmaz. Jelöljük az egységgömb felületét F_k-val, elegendő kis ε mellett a $2-\varepsilon$ átmérőjű gömbsüveg felülete S_k nyilván kielégíti az

$$S_k > cF_k \tag{1}$$

egyenlőtlenséget. Könnyű lenne úgy F_k-ra, mint S_k-ra explicit formulát találni, de erre nincs szükségünk.

Jelölje S^i az x_i középpontú $2-\varepsilon$ átmérőjű gömbsüveget $(i=1, \dots, n)$. Ha az $S^1, \dots, S^n$ süvegek a gömbfelület minden egyes pontját legfeljebb cn-szeresen fednék csak le, akkor fenn kellene állnia az $nS_k \leqq cnF_k$ egyenlőtlenségnek. Ez (1)-nek ellentmond. Tehát van a gömbfelületnek olyan z pontja, melyet az $S^1, \dots, S^n$ süvegek közül cn-nél több tartalmaz. Ha ezek a süvegek $S^{i_1}, \dots, S^{i_m}$ $(m > cn)$, akkor a z középpontú és $2-\varepsilon$ átmérőjű süveg tartalmazza az $x_{i_1}, \dots, x_{i_m}$ pontokat. Így bebizonyítottuk, hogy gráfunk bír a T_c tulajdonsággal, s ezzel tételünket igazoltuk.

A bizonyításunknak látszólagos szépséghibája, hogy G gráfunk végtelen, ez a hiba azonban csak látszólagos. Legyen ti. $\varkappa(G) = s$ (könnyű belátni különben, hogy elég kis ε-ra $\varkappa(G) = k+1$). De Bruijn és Erdős [2] egy tétele szerint G tartalmaz oly véges G' részgráfot, melyre $\varkappa(G') = \varkappa(G) = s$, G' véges gráf mármost nyilván kielégíti tételünk követelményeit.

Kifogásolni lehetne továbbá, hogy a de Bruijn—Erdős tétel bizonyítása a kiválasztási axiómát használja, ettől azonban kis fáradsággal meg tudnánk szabadulni. Geometriai eszközökkel be lehet ugyanis bizonyítani, hogy ha elegendő sok pontot veszünk fel a k-dimenziós gömb felületén, s e pontok eléggé sűrűn vannak eloszolva, s tekintjük G-nek az ezen pontok által feszített G_1 részgráfját, akkor $\varkappa(G_1) \geqq k+1$. Ezen állítás bizonyítását nem részletezzük.

Amint már megjegyeztük, tételünk $\frac{1}{2}$-re már nem igaz.

Talán igaz a következő: Ha minden m-re és minden $x_1, ..., x_m$ szögpontra $f(G(x_1, ..., x_m)) > \frac{m}{2}\left(1 - \frac{c_k}{\log m}\right)$, akkor $\varkappa(G) \leqq k$. Érdekesebbnek látszik a következő sejtés. Tegyük fel, hogy minden m-re

$$f(G(x_1, ..., x_m)) \geqq \frac{m-k}{2}$$

az $x_1, ..., x_m$ pontok minden választása mellett. Igaz-e akkor, hogy $\varkappa(G) \leqq k+2$? A $k+2$ szögpontú teljes gráf példája mutatja, hogy e sejtés, ha igaz, nem javítható. $k=0$ esetén, mint láttuk, a sejtés triviális, de már $k=1$-re se tudjuk bebizonyítani.

Tételünkből azonnal következik, hogy minden $c < \frac{1}{2}$-re van oly $\aleph_0$-kromatikus gráf, mely kielégíti a T_c tulajdonságot. Hogy ezt beláthassuk, legyen G_k-ra $\varkappa(G_k) \geqq k$ és elégítse ki G_k a T_c tulajdonságot, akkor nyilván a $\bigcup_k G_k = G$ gráf kromatikus száma $\aleph_0$ (a G gráf szögpontjai a G_k gráfok szögpontjai s élei a G_k gráfok élei). Kérdezhetjük, hogy létezik-e minden $m > \aleph_0$ számosságra és $c < \frac{1}{2}$-re oly G mely teljesíti a T_c tulajdonságot, s melyre $\varkappa(G) = m$, továbbá még megkívánhatnók, hogy G szögpontjainak számossága is m legyen. E kérdéseket egyelőre nem tudjuk elintézni, csak a következő részeredményt értük el:

Minden m-re létezik oly G gráf, mely kielégíti minden $c < \frac{1}{4}$-re a T_c tulajdonságot, s melyre $\varkappa(G) = m$. G szögpontjainak számossága 2^m.

A bizonyítást itt nem részletezzük, csak megadjuk G konstrukcióját. Legyenek G szögpontjai az (α, β) rendszámpárok, ahol $1 \leqq \alpha < \beta < \Omega_{2^m}$, ahol Ω_{2^m} a 2^m számosságú halmaz kezdőszáma. (α, β) akkor és csakis akkor van összekötve (γ, δ)-val, ha $\beta = \gamma$. Könnyű belátni, hogy e G minden $c < \frac{1}{4}$-re kielégíti a T_c tulajdonságot, a $\varkappa(G) = m$ relációt [6] cikkünkben bizonyítjuk be. Czipszer és Erdős egy kérdése, hogy vajon az m-dimenziós $(m > \aleph_0)$ Hilbert-tér egységgömbje felbomlik-e m-nél kevesebb, legfeljebb $2-\varepsilon$ átmérőjű halmaz összegére? Ha a válasz e kérdésre tagadó lenne, akkor e cikk és [7] módszerével könnyen látható, hogy van minden $c < \frac{1}{2}$-re m számosságú m-kromatikus gráf, melynek megvan a T_c tulajdonsága.

Dorothy Maharam Stonetől (szóbeli közlés) való a következő kérdés: A $(0, 1)$ intervallum minden H halmazához, melynek mértéke $m(H) \geqq \alpha$, hozzárendelünk egy pontot, két pont akkor van éllel összekötve, ha a hozzájuk rendelt H_1 és H_2 halmazokra fennáll $m(H_1 \cap H_2) > 0$. Mekkora e gráf kromatikus száma? Nyilván csak $\alpha < \frac{1}{2}$ esetén van probléma. Vázoljuk annak bizonyítását, hogy e kromatikus szám mindig $\aleph_0$. Ismeretes, hogy a mérhető halmazok tere szeparábilis, azaz létezik megszámlálható sok mérhető halmaz H_n, $1 \leqq n < \infty$ úgy, hogy ha H tetszőleges mérhető halmaz, akkor minden ε-hoz van oly H_n, hogy a H és H_n halmazok szimmetrikus differenciájának mértéke $< \varepsilon$. Ebből könnyen következik, hogy fenti gráfunk kromatikus száma $\leqq \aleph_0$. Most vázoljuk annak bizonyítását, hogy gráfunk kromatikus száma $\geqq \aleph_0$. Elég lesz bizonyítanunk, hogy e kromatikus szám $> k$ minden k-ra. Egy Halmos—Neumann János [8] tétel egy speciális esete szerint a $(0, 1)$ intervallum mértéktartó módon egy-egyértelműen leképezhető a k-dimenziós egységgömb felületére. Vizsgáljuk mármost a $2-\varepsilon$ sugarú gömbsüvegeket. Minden ilyen gömbsüvegnek megfeleltetünk egy pontot, a gömbsüveg középpontját, s két ilyen pont akkor legyen összekötve, ha e pontok távolsága $> 2-\varepsilon$, azaz, ha a két gömbsüvegnek nincs közös pontja. Tételünknél beláttuk, hogy e gráf kromatikus száma $> k$, s ezért a Halmos—Neumann tétel miatt a Maharam-féle gráf kromatikus száma is $> k$. Ezzel állításunkat be is bizonyítottuk.

Talán érdekes lesz megemlíteni a következő, M. Knesertől [9] való sejtést, mely tudtunkkal még nincs elintézve: Legyen egy $2n+k$ elemű halmaz minden n-edosztalyú kombinációjához hozzárendelve egy pont, két ilyen pont akkor van összekötve, ha a megfelelő kombinációknak nincs közös elemük. Bebizonyítandó, hogy e gráf kromatikus száma $k+2$. Könnyű belátni, hogy e kromatikus szám $\leqq k+2$.

IRODALOM

[1] K. Borsuk: Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphäre. *Fundamenta Math.*, **20** (1933) 177—190.
[2] N. G. de Bruijn and P. Erdős: A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations, Indagationes Math. **13** (1961), 371—373.
[3] P. Erdős, Graph theory and probability, Canad. J. Math. **11** (1959), 34—38.
[4] P. Erdős and R. Rado, A construction of graphs without triangles having preassigned order and chromatic number, J. London Math. Soc. **35** (1960), 445—448.
[5] P. Erdős and A. Hajnal, On the chromatic number of graphs and set systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **17** (1966), 61—99, Theorem 7. 4. p. 76.
[6] P. Erdős and A. Hajnal, On chromatic number of graphs,
[7] P. Erdős, On the construction of certain graphs, J. Combinatorial Theory, **1** (1966), 149—153.
[8] P. Halmos and J. v. Neumann, Operator methods in classical mechanics. Ann. Math. **43** (1942) 332—350.
[9] M. Kneser, Aufgabe 300, Jahresbericht d. Deutschen Math. Ver. **58** (2) (1955).
[10] Lásd például B. Descartes (ez itt Tutte álneve) k-chromatic graphs without triangles, Solution to problem 4526 proposed by P. Ungár), Amer. Math. Monthly **61** (1954), 352—353.

О КРОМАТИЧЕСКИХ ГРАФАХ

П. ЭРДЕШ—А. ХАЙНАЛ

ON CHROMATIC GRAPHS

P. ERDŐS AND A. HAJNAL

A graph G is said to have property T_c if for every k and every k of its vertices $x_1, \ldots, x_k$ the subgraph $G(x_1, \ldots, x_k)$ spanned by the vertices $x_1, \ldots, x_k$ contains a set of independent vertices having ck elements. We show that for every $c<\frac{1}{2}$ there is a graph G having property T_c and chromatic number $\aleph_0$. Clearly a graph having property $T_{\frac{1}{2}}$ has chromatic number at most 2.

The question is left open if for every $m>\aleph_0$ and every $c<\frac{1}{2}$ there is a graph G having m vertices, satisfying property T_c and of chromatic number m.