GRÁFOK PÁROS KÖRÜLJÁRÁSÚ RÉSZGRÁFJAIRÓL

ERDŐS PÁL

$G(n; m)$ jelentsen n szögpontú m élű gráfot. Egy gráfot akkor nevezünk páros körüljárásúnak, ha minden körének páros számú éle van. Ismeretes (és triviális) hogy egy páros körüljárású gráf kromatikus száma kettő — azaz gráfunk szögpontjait meg lehet színezni két színnel (pl. piros és zöld színnel) úgy, hogy két ugyanazon színű pont soha nincsen összekötve.

Régebben bebizonyítottam a következő lemmát [1]:

Minden $\mathcal{G}(n; m)$ tartalmaz egy páros körüljárású részgráfot, melynek legalább $m/2$ éle van.

Az n szögpontú teljes gráf $G\left(n; \binom{n}{2}\right)$ példája mutatja, hogy e lemmában $m/2$ nem helyettesíthető cm-mel, ha $c > \frac{1}{2}$. Azt sejtettem azonban, hogy ha $G(n; m)$ nem tartalmaz háromszöget, akkor van oly $c > \frac{1}{2}$ konstans, hogy $G(n; m)$ gráfunk igenis tartalmaz cm élű páros körüljárású gráfot. Be fogjuk bizonyítani azonban, hogy e sejtés nem igaz. Sőt, fennáll a következő:

TÉTEL. *Minden $\varepsilon > 0$-hoz és k-hoz van oly $G(n; m)$, mely nem tartalmaz semmilyen $l \leq k$-ra l élű kört, s mely nem tartalmaz $\frac{m}{2}(1+\varepsilon)$ élű páros kötüljárású részgráfot.*

A tételünket kielégítő $G(n; m)$ létezését nem tudom közvetlen konstrukcióval kimutatni, hanem kénytelen vagyok valószínűségszámítási módszereket használni. A bizonyítás nagyon hasonlít [2] és [3]-ban használt módszerekhez. Érdekes lenne tételünket közvetlen konstrukcióval bizonyítani. [2]-ben például valószínűségszámítási módszerekkel igazolom, hogy minden k és l-hez van oly k-kromatikus gráf, melynek minden köre legalább l élű. Legújabban Lovásznak sikerült e tételre egy igen szellemes konstruktív bizonyítást találni. Lovász bizonyítása az Acta Math. Acad. Sci Hung.-ban fog megjelenni. Bizonyos szempontból azonban a valószínűség számítási módszer többet ad. [2]-ben ugyanis kimutatom, hogy minden ε-hoz és l-hez létezik oly n szögpontú gráf $(n > n_0(\varepsilon, l))$, melynek minden köre legalább l élű s a független pontok maximális száma $< \varepsilon n$ (azaz gráfunk nem tartalmaz εn olyan pontot, hogy bármely kettő nincsen éllel összekötve). Érdekes lenne ezt a tételt is közvetlen konstrukcióval igazolni.

Egy további példa e módszerre a következő: Jelölje $f(n)$ azt a legkisebb számot, melyre minden $f(n)$ szögpontú gráf tartalmaz vagy n szögpontú teljes részgráfot, vagy n szögpontú független részgráfot. [4]-ben valószínűségszámítási módszerekkel bebizonyítottam, hogy $f(n) > 2^{n/2}$. Tudtommal konstruktív módon $f(n)$-re nem sikerült nem triviális alsó becslést találni $\left(f(n) > (n-1)^2\right.$ teljesen triviális, lásd még [5]$\left.\right)$.

Mielőtt tételünket bebizonyítanám, megjegyzem, hogy az [1]-ben bizonyított lemma kissé azért mégis élesíthető (mint azt már [1]-ben is észrevettem): Ha $G(n;m)$ nem tartalmaz 0-adfokú szögpontokat, akkor tartalmaz $\left[\frac{m+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ élű páros körüljárású gráfot. Ezen állítás n-ről $n+4$-re való teljes indukcióval nagyobb nehézség nélkül bebizonyítható (hasonlóan, mint [1]-ben), a bizonyítás részleteit az olvasóra bízzuk.

Rátérünk mármost tételünk bizonyítására. Tekintsük az összes n szögpontú és m élű gráfokat; feltesszük, hogy a szögpontok számozottak — azaz egymástól megkülönböztethetők. Ezen gráfok száma nyilván $\binom{\binom{n}{2}}{m}$. $P(G(n;m))$ jelentse a $G(n;m)$-gráf legnagyobb páros élszámú körüljárású részgráfjának élszámát.

Szükségünk lesz most két lemmára:

1. Lemma. *Legyen $n\to\infty$, $m/n\to\infty$. Minden fix $\delta>0$-ra $o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$ gráf kivételével*

$$P(G(n;m))<\frac{m}{2}(1+\delta).$$

Az 1. lemma bizonyítása [3]-ban használt módszerekkel könnyen következik. Legyen $T=\left[\frac{m}{2}(1+\delta)\right]$ és U_l jelölje azon $G(n;m)$ gráfok számát, melyekre

$$P(G(n;m))=l.$$

Lemmánk nyilván következik, ha sikerül bebizonyítanunk, hogy

$$\sum_{l=T}^{m} U_l=o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right), \tag{1}$$

ugyanis nyilvánvaló, hogy azon $G(n;m)$ gráfok száma, melyekre $P(G(n;m))\geqq T$, éppen $\sum_{l=T}^{m} U_l$.

Könnyű belátni, hogy

$$U_l\leqq\sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{s}\binom{s(n-s)}{l}\binom{\binom{n}{2}-s(n-s)}{m-l}. \tag{2}$$

Hogy (2)-t bebizonyítsuk, jelölje $G'(n;l)$ $G(n;m)$ egy l élű páros körüljárású részgráfját. Tegyük fel továbbá, hogy $G'(n;l)$-nek s piros és $n-s$ zöld szögpontja van (tehát $G'(n;l)$ minden éle egy piros és egy zöld szögpontot köt össze). Az általánosság rovása nélkül feltehetjük, hogy $O<s\leqq\frac{n}{2}$. Az s piros szögpont nyilván $\binom{n}{s}$-féleképpen választható. A piros szögpontokból nyilván $s(n-s)$ él megy a zöld szögpontokba. $G'(n;l)$ l éle tehát legfeljebb

$$\sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{s}\binom{s(n-s)}{l} \tag{3}$$

féleképpen választható ki. $G(n; m)$ többi $m-l$ éle nem köthet össze egy kék és zöld pontot $G'(n; l)$ maximalitási tulajdonsága miatt, s ezért ezen élek

$$(4)\qquad \binom{\binom{n}{2}-s(n-s)}{m-l}$$

féleképpen választhatók. (3) és (4)-ből azonnal következik (2).

Egyszerű meggondolás mutatja mármost, hogy $l \geqq \frac{m}{2}(1+\varepsilon)$ miatt

$$\binom{s(n-s)}{l}\binom{\binom{n}{2}-s(n-s)}{m-l}$$

az $1 \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ intervallumban, s növekvő függvénye (az egyszerű bizonyítást az olvasóra bízzuk). A bizonyításnál csak azt kell figyelembe venni, hogy $s(n-s)$ is növekvő függvény az $1 \leqq s \leqq \left[\frac{n}{2}\right]$ intervallumban. Legyen

$$(5)\qquad u = \left[\frac{n}{2}\right]\left(n-\left[\frac{n}{2}\right]\right), \quad v = \binom{n}{2}-u.$$

Így tehát (2)-ből nyerjük, hogy

$$(6)\qquad U_l < \sum_{s=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{s}\binom{u}{l}\binom{v}{m-l} < 2^n \binom{u}{l}\binom{v}{m-l}.$$

Könnyű belátni továbbá, hogy a $T \leqq l \leqq m$ intervallumban $\binom{u}{l}\binom{v}{m-l}$ l-nek csökkenő függvénye, s így (6)-ból nyerjük, hogy

$$(7)\qquad \sum_{l=T}^{m} U_l < 2^n m \binom{u}{T}\binom{v}{m-T} < 2^n n^2 \binom{u}{T}\binom{v}{m-T}.$$

Legyen mármost $\left[\frac{m}{2}\right] < r < \left[\frac{m}{2}(1+\delta)\right]$. Minthogy (5) miatt $u = (1+o(1))v$, egyszerű számolás adja, hogy

$$(8)\qquad \frac{\binom{u}{r}\binom{v}{m-r}}{\binom{u}{r-1}\binom{v}{m-r+1}} = \frac{u-r+1}{r}\,\frac{m-r+1}{v-m+r} \leqq 1+o(1)$$

és ha $\frac{m}{2}\left(1+\frac{\delta}{2}\right) < r < \frac{m}{2}(1+\delta)$, akkor

$$(9)\qquad \frac{\binom{u}{r}\binom{v}{m-r}}{\binom{u}{r-1}\binom{v}{m-r+1}} < 1-\eta,$$

ahol $\eta=\eta(\delta)$ csak δ-tól függ. (7), (8) és (9)-ből azonnal nyerjük, hogy

$$(10)\qquad \binom{u}{T}\binom{v}{m-T}<\binom{u}{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{v}{m-\left[\frac{m}{2}\right]}\cdot\left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{-\frac{\delta m}{2}}.$$

Nyilvánvaló továbbá, hogy

$$(11)\qquad \binom{u}{\left[\frac{m}{2}\right]}\binom{v}{m-\left[\frac{m}{2}\right]}<\binom{u+v}{m}=\binom{\binom{n}{2}}{m}.$$

Végül, minthogy $n\to\infty$ és $\frac{m}{n}\to\infty$, elegendő nagy n-re

$$(12)\qquad \left(1-\frac{\eta}{2}\right)^{\frac{\delta m}{2}}<\frac{1}{4^n}.$$

(7), (10), (11) és (12)-ből nyilvánvaló, hogy

$$\sum_{l=T}^{m} U_l<2^n n^2\frac{\binom{\binom{n}{2}}{m}}{4^n}=o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$$

s ezzel (1) miatt lemmánkat igazoltuk.

2. LEMMA. *Legyen* $n\to\infty$, $m=o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$, $o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$ *gráf kivételével minden* $G(n;m)$ *n-nél kevesebb oly kört tartalmaz, melynek legfeljebb* l *éle van.*

A 2. lemma [2]-ben be van bizonyítva, de a teljesség kedvéért a bizonyítást közöljük. Nyilvánvaló, hogy azon $G(n;m)$-ek száma, melyek egy fix l élű kört tartalmaznak,

$$(13)\qquad \binom{\binom{n}{2}-l}{m-l},$$

(ugyanis az l élű kör élei előfordulnak gráfunkban, s a többi $m-l$ élt szabadon választhatjuk). Az n szögpontú teljes gráf l élű köreinek száma viszont kisebb, mint

$$(14)\qquad n|n-1|\dots|n-l+1|<n^l.$$

Jelölje mármost $f_k(G(n;m))$ a $G(n;m)$-ben előforduló legfeljebb k élű körök számát. (13) és (14)-ből nyilván nyerjük, hogy $\sum'$-ben az összegezés az összes n szögpontú m élű gráfokra van kiterjesztve — ezek száma $\binom{\binom{n}{2}}{m}$,

$$(15)\qquad \sum' f_k(G(n;m)) < \sum_{l=3}^{k} \binom{\binom{n}{2}-l}{m-l} n^l <$$

$$< (1+o(1)) \binom{\binom{n}{2}}{m} \sum_{l=3}^{k} n^l \left(\frac{m}{\binom{n}{2}}\right)^l = o\left(n \cdot \binom{\binom{n}{2}}{m}\right),$$

(15)-ben használtuk, hogy $m = o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$. (15)-ből lemmánk rögtön leolvasható.

Két lemmánkból könnyen nyerjük tételünket. Legyen $n \to \infty$ $m/n \to \infty$, $m = o\left(n^{1+\frac{1}{k}}\right)$, (pl. $m = [n \log n]$). $G_1(n;m)$ legyen oly gráf, mely n-nél kevesebb oly kört tartalmaz, melynek legfeljebb k éle van s melyre $P(G_1(n;m)) < \frac{m}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)$.

Lemmáinkból következik, hogy ily gráf van, sőt $o\left(\binom{\binom{n}{2}}{m}\right)$ gráf kivételével minden $G(n;m)$ ilyen. $G_1(n;m)$ minden legfeljebb k élű köréből hagyjunk el egy élt, ilymódon nyerünk egy $G_1(n, m_1)$ gráfot, melyre

$$m_1 \geqq m-n, \quad P(G_1(n;m_1)) < \frac{m}{2}\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right) < \frac{m_1}{2}(1+\varepsilon)$$

és mely nem tartalmaz semmilyen $l \leqq k$-ra l élű kört, ezzel tételünk igazolva van.

Módszerünkkel még a következő két élesebb tétel nyerhető:

Minden $\varepsilon > 0$-hoz van oly $\eta = \eta(\varepsilon)$ és egy $G(n;m)$, mely nem tartalmaz $[\eta \log n]$-nél kevesebb élű kört és melyre $P(G(n;m)) < \frac{m}{2}(1+\varepsilon)$. A $\log n$-es nagyságrend nem javítható, de az ε-hoz tartozó η megengedhető legnagyobb értékét nem tudom meghatározni.

Minden k-hoz van oly $\varepsilon_k > 0$ és egy $G(n;m)$ mely nem tartalmaz semmilyen $l \leqq k$-ra l élű kört és melyre

$$P(G(n;m)) < \frac{m}{2} + m^{1-\varepsilon_k}.$$

ε_k legnagyobb megengedhető értékét nem lesz könnyű meghatározni. A bevezetésben említett tétel szerint viszont minden $G(n;m)$ gráfra

$$P(G(n;m)) \geqq \left[\frac{m+1}{2}\right] + \left[\frac{n}{4}\right] > \frac{m}{2} + cm^{\frac{1}{2}}.$$

Lehet, hogy ha feltesszük, hogy $G(n;m)$ nem tartalmaz háromszöget, akkor a kitevőben lévő $\frac{1}{2}$ egy nagyobb állandóval helyettesíthető, de ezt a kérdést nem sikerült elintéznem.

IRODALOM

[1] *P. Erdős:* On some extremal problems in graph theory, Israel Journ. of Math. 3 (1965) 113—116.
[2] *P. Erdős:* Graph Theory and probability, I. Canadian Journ. of Math. 11 (1959) 34—38.
[3] *P. Erdős* and *A. Rényi:* On the evolution of random graphs, Publ. Math. Inst. Hung. Acad. 5 (1960), 17—61.
[4] *P. Erdős:* Some remarks on the theory of graphs, Bull. Amer. Math. Soc. 53 (1947) 292—294.
[5] *Erdős Pál:* Ramsey és Van der Waerden tételével kapcsolatos kombinatorikai kérdésekről, Mat. Lapok 14 (1963) 29—37.

ЧЁТНЫЕ ПОДГРАФЫ ГРАФОВ

П. ЭРДЁШ

ON EVEN SUBGRAPHS OF GRAPHS

P. ERDŐS

Let $\mathscr{G}(n; m)$ be a graph of n vertices and m edges. Every such graph contains an even (i. e. two chromatic) subgraph having $\left[\frac{m+1}{2}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]$ edges. The complete graph shows that in general this result is best possible.

One could have thought that this result can be improved if our graph contains no triangle. I show that this is not so. In fact I show that for every ε and k there is a $G(n; m)$ which does not contain a circuit having fewer than $k+1$ edges and which does not contain an even subgraph of more than $\frac{m}{2}(1+\varepsilon)$ edges.