Über ein Extremalproblem in der Graphentheorie

Reinhold Baer zum 60. Geburtstag

Von

P. Erdös

$G_l^{(n)}$ sei ein Graph mit n Knotenpunkten und l Kanten. Mehrfache Kanten und Schlingen werden nicht zugelassen. $\nu(G)$ wird die Anzahl der Kanten, $\pi(G)$ die Anzahl der Knotenpunkte von G sein. Knotenpunkte von G werden mit den Buchstaben x, x_i, y_i, Kanten mit den Buchstaben e, e_i bezeichnet. Die Kante, die die Knotenpunkte x_1 und x_2 verbindet, wird mit (x_1, x_2) bezeichnet. $\mathscr{V}(x)$, die Valenz von x, ist die Anzahl der mit x inzidenten Kanten.

Ein Graph heißt vollständig, wenn je zwei seiner Knotenpunkte durch eine Kante verbunden sind. Ein vollständiger Graph mit $\pi(G) = n$ kann also als $G^{(n)}_{\binom{n}{2}}$ geschrieben werden. Ein Graph $G_l^{(n)}$ mit $l > \binom{n}{2}$ soll immer den vollständigen Graphen $G^{(n)}_{\binom{n}{2}}$ bedeuten.

Ein Dreieck ist ein vollständiger Graph mit drei Knotenpunkten. Dreiecke werden mit d, d_i bezeichnet. Das Dreieck, das durch die Kante e und den Knotenpunkt x, der nicht mit e inzidiert, bestimmt wird, wollen wir mit $[e, x]$ bezeichnen.

Der Graph $(G - x_1 - \cdots - x_r)$ wird erhalten, indem wir die Knotenpunkte $x_1, \ldots, x_r$ und alle mit ihnen inzidierenden Kanten von dem Graphen G weglassen. Sonst werden wir die in der Graphentheorie üblichen Bezeichnungen benützen.

Turán [1], [2] bestimmte für jedes n und r die kleinste Zahl $f_r(n)$, so daß jeder Graph $G^{(n)}_{f_r(n)+1}$ einen vollständigen Teilgraphen $G^{(r)}_{\binom{r}{2}}$ enthält. Er bestimmte auch (die übrigens eindeutig festgelegte) Struktur des Graphen $G^{(n)}_{f_r(n)}$, der kein $G^{(r)}_{\binom{r}{2}}$ enthält.

Weiter stellte er auch folgende Frage: Was ist die kleinste Anzahl von Kanten l, die ein Graph $G_l^{(n)}$ enthalten muß, damit gewisse Konfigurationen im Graphen $G_l^{(n)}$ sicher vorkommen sollen? Vor kurzem erschienen verschiedene Arbeiten über dieses Thema [3], [4]. Insbesondere bewiesen Pósa und ich, daß für

$$n \geqq 24k \text{ und } l \geqq (2k-1)n - 2k^2 + k + 1$$

jedes $G_l^{(n)}$ k unabhängige Kreise (d. h. k geschlossene Kantenzüge, die paarweise keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben) enthält. Wir zeigten weiter, daß für

$$n \geqq 24k \quad \text{und} \quad l = (2k-1)n - 2k^2 + k$$

$G_l^{(n)}$ mit einer einzigen Ausnahme ebenfalls k unabhängige Kreise enthält. Der Ausnahme-Graph hat $2k-1$ Knotenpunkte $x_1, \ldots, x_{2k-1}$ mit $\mathscr{V}(x_i) = n - 1$, die anderen $n - 2k + 1$ Knotenpunkte haben Valenz $2k - 1$; dies bestimmt die Struktur des Graphen $G_l^{(n)}$ eindeutig.

In seiner oben zitierten Arbeit [1] zeigt Turán, daß für $n \geqq 3$

$$f_3(n) = \left[\frac{n^2}{4}\right]$$

ist. Vor einiger Zeit zeigte ich, daß für $n \geqq 4$ jedes $G_{n^2+n}^{(2n)}$ zwei unabhängige Dreiecke enthält, und daß $n^2 + n$ die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft ist. Hajnal fragte mich, ob man die kleinste Zahl $h_k(n)$ bestimmen kann, so daß jeder Graph $G_{h_k(n)+1}^{(n)}$ k unabhängige Dreiecke enthält (also k Dreiecke, die paarweise keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben)? In dieser Allgemeinheit kann ich die Frage nicht beantworten, kann aber $h_k(n)$ für jedes k und $n > n_0(k)$ bestimmen.

Zunächst einige Definitionen. Es sei

$$l(n, k) = \left[\frac{(n-k+1)^2}{4}\right] + (k-1)n - (k-1)^2 + \binom{k-1}{2}.$$

Besteht keine Gefahr von Mißverständnissen, so wollen wir l anstelle von $l(n, k)$ schreiben. $\mathscr{G}_l^{(n)}$ sei folgender Graph: Er hat $k - 1$ Knotenpunkte $x_1, \ldots, x_{k-1}$ mit $\mathscr{V}(x_i) = n - 1$ (der Knotenpunkt x_i, $1 \leqq i \leqq k - 1$, ist also mit allen anderen Knotenpunkten verbunden). Die übrigen $n - k + 1$ Knotenpunkte von $\mathscr{G}_l^{(n)}$ sind in zwei Klassen von $\left[\frac{n-k+1}{2}\right]$ und $\left[\frac{n-k+2}{2}\right]$ Punkte verteilt, so daß je zwei Knotenpunkte in verschiedenen Klassen mit einer Kante verbunden sind. Offenbar gilt

$$\pi(\mathscr{G}_l^{(n)}) = n, \quad \nu(\mathscr{G}_l^{(n)}) = l(n, k)$$

und die Struktur von $\mathscr{G}_l^{(n)}$ ist eindeutig festgelegt. Jedes Dreieck von $\mathscr{G}_l^{(n)}$ enthält mindestens einen der Knotenpunkte x_i, $1 \leqq i \leqq k - 1$, daher kann $\mathscr{G}_l^{(n)}$ nicht k unabhängige Dreiecke enthalten.

Nun beweisen wir den folgenden

Satz 1. *Es sei $n \geqq 400k^2$, $l_1 \geqq l(n, k) = l$. Dann enthält jedes $G_{l_1}^{(n)}$ k unabhängige Dreiecke mit der einzigen Ausnahme: wenn $l_1 = l$ und $G_l^{(n)}$ eben unser $\mathscr{G}_l^{(n)}$ ist.*

Korollar. *Für $n \geqq 400\,k^2$ ist $h_k(n) = l(n, k)$.*

Bevor wir unseren Satz beweisen, wollen wir zunächst zeigen, daß er nicht für alle $n \geqq 3k$ richtig ist. Wir definieren einen Graphen $G_{\binom{3k-1}{2}+1}^{(3k)}$ wie folgt: x_1 ist nur mit x_2 verbunden, der Graph $\left(G_{\binom{3k-1}{2}+1}^{(3k)} - x_1\right)$ ist vollständig. Offenbar kann dieser Graph nicht k unabhängige Dreiecke enthalten. Also gilt

$$h_k(3\,k) \geqq \binom{3\,k-1}{2} + 1 > l(3\,k, k) \quad \text{für} \quad k \geqq 3\,.$$

Es ist leicht zu sehen, daß $h(3k, k) = \binom{3\,k-1}{2} + 1$ ist; wir überlassen aber den Beweis dem Leser. Das obige Beispiel zeigt noch, daß eine absolute Konstante $c > 0$ existiert, so daß für $n < 3\,k(1 + c)$ $h_k(n) > l(n, k)$ gilt.

Satz 1 ist für einen Induktionsbeweis nicht gut geeignet, darum wollen wir ihn etwas umformen. Denselben Kunstgriff wandten wir in unserer Arbeit mit PÓSA an.

Satz 1'. *Es sei $\bar{n} = n$ für $n < 400k^2$, $\bar{n} = 400k^2$ für $n \geqq 400k^2$ und*

$$l'(n,k) = l' = \left[\frac{(n-k+1)^2}{4}\right] + (k-1)n - (k-1)^2 + \binom{k-1}{2} + \left[\frac{1}{2}(400k^2 - \bar{n})\right].$$

Für $n \geqq 3k$ und $l'_1 \geqq l'$ enthält jedes $G^{(n)}_{l'_1}$ k unabhängige Dreiecke mit der einzigen Ausnahme: wenn $n \geqq 400k^2$, $l'_1 = l' = l$ und $G^{(n)}_l$ eben unser $\mathscr{G}^{(n)}_l$ ist.

Da für $n \geqq 400\,k^2$ $l' = l$ ist, folgt Satz 1 aus Satz 1'. Es wird also genügen, Satz 1' zu beweisen.

Wir werden Satz 1' für jedes k durch Induktion nach n beweisen. Für $n \leqq 20\,k$ ist $G^{(n)}_{l'}$ offenbar ein vollständiger Graph wegen $l' > \binom{n}{2}$, also ist Satz 1' für $3k \leqq n \leqq 20k$ richtig. Es sei also $n > 20k$ und wir nehmen an, daß Satz 1' für alle $3k \leqq m < n$ gilt und wir wollen ihn für n beweisen. Wenn uns dies gelungen ist, haben wir Satz 1' durch vollständige Induktion bewiesen.

Es sei also ein Graph $G^{(n)}_{l'_1}$ mit $n > 20k$, $l'_1 \geqq l'$ gegeben. Es sei t die maximale Anzahl unabhängiger Dreiecke von $G^{(n)}$ und $d_1, \ldots, d_t$ ein maximales System unabhängiger Dreiecke. Wenn $t \geqq k$ ist, so ist nichts zu beweisen. Wir können also annehmen, daß $t < k$ ist. Wir werden zeigen, daß dies nur dann der Fall sein kann, wenn $n \geqq 400k^2$, $l'_1 = l$ und $G^{(n)}_l$ unser $\mathscr{G}^{(n)}_l$ ist.

Lemma 1. *Jeder Knotenpunkt von $G^{(n)}$ hat Valenz größer als $5k-1$.*

Wenn $\mathscr{V}(x) \leqq 5k-1$ ist, so hätten wir die Ungleichung

$$\nu(G^{(n)}_{l'_1} - x) \geqq l'(n,k) - 5k + 1 > l'(n-1,k)\,, \tag{1}$$

da, wie eine leichte Rechnung zeigt, (wegen $n > 20k$)

$$l'(n,k) - l'(n-1,k) \geqq 5k$$

ist. Wegen $\pi(G^{(n)}_{l'_1} - x) = n-1$ folgt aus (1) und aus unserer Induktionsvoraussetzung, daß $(G^{(n)}_{l'_1} - x)$, also auch $G^{(n)}_{l'_1}$, k unabhängige Dreiecke enthält, was unserer Voraussetzung widerspricht.

Lemma 2. *(x_1, x_2) sei eine Kante von $G^{(n)}_{l'_1}$. Dann gilt*

$$\mathscr{V}(x_1) + \mathscr{V}(x_2) \geqq n + k - 1\,. \tag{2}$$

Eine leichte Rechnung zeigt

$$l'(n,k) - l'(n-2,k) \geqq n - k + 2k - 2 - 1 = n + k - 3\,, \tag{3}$$

wo in (3) das Gleichheitszeichen nur für $n \leqq 400k^2$ gilt. Wenn daher (2) falsch wäre, würde aus (3) folgen, daß

$$\nu(G^{(n)}_{l'_1} - x_1 - x_2) \geqq l'_1 - n - k + 3 \geqq l'(n,k) - n - k + 3 \geqq l'(n-2,k) \tag{4}$$

ist. Das Gleichheitszeichen gilt nur für $l'_1 = l'(n,k)$ und $n \leqq 400k^2$. Aus unserer

Induktionsvoraussetzung folgt daher, daß $(G^{(n)}_{l_1} - x_1 - x_2)$ k unabhängige Dreiecke enthält (für $n > 400k^2$ wegen $\nu(G^{(n)}_{l_1} - x_1 - x_2) > l'(n-2, k)$ und für $n \leqq 400k^2$ wegen $l'(n-2, k) > l(n-2, k)$). Dies aber widerspricht unserer Voraussetzung.

Lemma 3. *Jede Kante von $G^{(n)}_{l_1}$ kommt in mindestens $k-1$ Dreiecken vor.*

Aus Lemma 2 folgt sofort, daß mindestens $k-1$ Knotenpunkte mit beiden Knotenpunkten der Kante verbunden sind.

Lemma 4. *$G^{(n)}_{l_1}$ enthält mindestens $k+2$ unabhängige Kanten, die keinen gemeinsamen Knotenpunkt mit dem maximalen System unabhängiger Dreiecke $d_1, \ldots, d_t$ haben.*

Sei $e_1, \ldots, e_r$ ein maximales System unabhängiger Kanten, die mit $d_1, \ldots, d_t$ keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben. Ist $r \leqq k+1$, so sei x ein Knotenpunkt von $G^{(n)}_{l_1}$, welcher nicht mit den d_i und e_j inzidiert (wegen $t < k, r \leqq k+1$ und $n > 20k$ muß es einen solchen Knotenpunkt geben). Wegen $\mathscr{V}(x) > 5k$ (Lemma 1) folgt aus $t < k$ und $r \leqq k+1$, daß eine Kante (x, y) existiert, so daß y weder mit den d_i noch mit den e_j inzidiert. Dies aber widerspricht der Maximalität von r.

Jetzt können wir Satz 1′ beweisen. Auf Grund des Turánschen Satzes ist unser Satz für $k = 1$ für jedes $n \geqq 3$ richtig. Also genügt es, den Fall $k \geqq 2$ zu betrachten. Nach Lemma 3 enthält $G^{(n)}_{l_1}$ mindestens ein Dreieck, daher ist also $t \geqq 1$. Es seien $e_1, \ldots, e_{k+2}$ die nach Lemma 4 existierenden unabhängigen Kanten, die auch von den $d_i, 1 \leqq i \leqq t$, unabhängig sind. Nach Lemma 3 gibt es zu jedem $j, 1 \leqq j \leqq$ $\leqq k+2$, mindestens $k-1$ Knotenpunkte $x^{(j)}_s$, $1 \leqq s \leqq k-1$, die mit e_j ein Dreieck bilden ($x^{(j_1)}_{s_1}$ kann mit $x^{(j_2)}_{s_2}$ zusammenfallen, wenn $j_1 \neq j_2$ ist). Wegen der Maximalität von t sind die $x^{(j)}_s$ für jedes s und j mit den d_i inzident.

Wir teilen nun die Kanten $e_j, 1 \leqq j \leqq k+2$, in zwei Klassen. In der ersten Klasse sind die Kanten e_j, für welche es ein Dreieck $d_{F(j)}, 1 \leqq F(j) \leqq t$, gibt, so daß mindestens zwei der Knotenpunkte $x^{(j)}_s$, $1 \leqq s \leqq k-1$, mit $d_{F(j)}$ inzidieren. Die Anzahl der Kanten der ersten Klasse kann aber höchstens t sein. Wenn doch $t+1$ Kanten in der ersten Klasse wären, so würde durch Schubfachschluß folgen, daß zwei Zahlen j_1 und j_2 mit $F(j_1) = F(j_2) = l$ existieren $(1 \leqq l \leqq t)$. Dann gibt es aber zwei unabhängige Dreiecke $[e_{j_1}, y_1]$ und $[e_{j_2}, y_2]$, wo y_1 und y_2 Knotenpunkte von $d_l =$ $= d_{F(j_1)} = d_{F(j_2)}$ sind. Offenbar sind dann die $t+1$ Dreiecke $d_1, \ldots, d_{l-1}, d_{l+1}, \ldots, d_t, [e_{j_1}, y_1], [e_{j_2}, y_2]$ unabhängig, dies aber widerspricht der Maximalität von t.

Für die Kanten der zweiten Klasse gehören die $x^{(j)}_s$, $1 \leqq s \leqq k-1$, zu lauter verschiedenen Dreiecken d_i, $1 \leqq i \leqq t$. Aus Lemma 4 und der eben bewiesenen Tatsache, daß die Anzahl der Kanten der ersten Klasse höchstens t — also höchstens $k-1$ — ist, folgt, daß mindestens drei Kanten, z. B. e_1, e_2, e_3, in der zweiten Klasse sind. Schon aus der Tatsache, daß es eine Kante in der zweiten Klasse gibt, folgt, daß $t \geqq k-1$, also wegen $t < k$, $t = k-1$ ist.

Zu jeder Kante $e_j, 1 \leqq j \leqq 3$, gehören $k-1$ Knotenpunkte $x^{(j)}_s$, $1 \leqq s \leqq k-1 = t$, so daß $x^{(j)}$ mit d_s inzidiert und $[e_j, x^{(j)}_s]$ ein Dreieck von $G^{(n)}_{l_1}$ ist. Wir können annehmen, daß für jedes s $x^{(1)}_s = x^{(2)}_s = x^{(3)}_s$ ist. Wenn dies nicht der Fall wäre, wenn also z.B. $x^{(1)}_{s_0} \neq x^{(2)}_{s_0}$ ist, sind die $t+1 = k$ Dreiecke

$$d_1, \ldots, d_{s_0-1}, d_{s_0+1}, \ldots, d_t, \quad [e_1, x^{(1)}_{s_0}], \quad [e_2, x^{(2)}_{s_0}]$$

offenbar unabhängig, was der Maximalität von t widerspricht.

Setzen wir nun $x_s^{(1)} = x_s^{(2} = x_s^{(3)} = y_s$; y_s inzidiert mit d_s, $1 \leqq s \leqq t = k-1$. Wir behaupten nun die entscheidende Tatsache, daß jedes Dreieck von $G_{l_1'}^{(n)}$ mit einem der Knotenpunkte $y_1, \ldots, y_{k-1}$ inzidiert.

Um dies einzusehen, sei d ein Dreieck, das mit keinem der Knotenpunkte $y_1, \ldots, y_{k-1}$ inzidiert. d kann nicht mit allen drei Kanten e_1, e_2, e_3 einen gemeinsamen Punkt haben, da sonst $d, d_1, \ldots, d_{k-1}$ unabhängig wären, was unmöglich ist. Nehmen wir also an, daß d und e_1 keinen gemeinsamen Knotenpunkt haben. Dann sind aber die k Dreiecke d, $[e_1, y_i]$, $1 \leqq i \leqq k-1$, unabhängig, was unmöglich ist. Hiermit ist unsere Behauptung bewiesen.

Jetzt ist es aber ganz leicht, den Beweis von Satz 1′ zu beenden. Aus dem TURÁNschen Satz folgt

(5) $$\nu(G_{l_1'}^{(n)} - y_1 - \cdots - y_{k-1}) \leqq \left[\frac{(n-k+1)^2}{4}\right],$$

da $(G_{l_1'}^{(n)} - y_1 - \cdots - y_{k-1})$ kein Dreieck enthält. Die Anzahl der Kanten, die mit $y_1, \ldots, y_{k-1}$ inzidieren, ist aber höchstens

(6) $$(k-1)\,n - (k-1)^2 + \binom{k-1}{2}.$$

Aus (5) und (6) folgt

(7) $$l_1' \leqq l(n, k)$$

und Gleichheit in (7) ist nur möglich, wenn sie auch in (5) und (6) gilt. Dann ist aber offenbar $G_{l_1'}^{(n)}$ eben unser $\mathscr{G}_l^{(n)}$ und es muß $n \geqq 400\,k^2$ gelten. Damit ist Satz 1′ und auch Satz 1 bewiesen.

Mit einem etwas komplizierteren Beweis könnten wir zeigen, daß eine absolute Konstante C existiert, so daß Satz 1 schon für $n > C \cdot k$ gilt, und es wäre leicht eine grobe Abschätzung für C zu erhalten. Die Induktion müßte aber sowohl nach n wie nach k geführt werden. Ich sehe aber nicht, wie man den genauen Wert von C bestimmen könnte. Es ist leicht zu zeigen, daß für $k = 2$ Satz 1 für alle $n \geqq 7$ richtig ist, aber für $n = 6$ falsch ist. Den Beweis überlassen wir dem Leser.

Wir wollen noch ohne Beweis folgenden Satz vom ZARANKIEVICZ-DIRACschen Typus[1]) aussprechen:

Satz 2. *Es sei $G^{(n)}$ ein Graph und $k \equiv n$ (mod 2). Wir nehmen an, daß für jeden Knotenpunkt x von $G^{(n)}$ $\mathscr{V}(x) \geqq \frac{n+k}{2}$ ist. Dann enthält $G^{(n)}$ für $n > n_0(k)$ k unabhängige Dreiecke.*

Der Beweis ist ähnlich aber einfacher als der Beweis von Satz 1.

Vielleicht gilt aber Satz 2 für jedes $k \leqq \frac{n}{3}$, $n \equiv k$ (mod 2). Für $n = 3k$ ist dies ein vor einigen Monaten bewiesener Satz von CORRÁDI und HAJNAL [6].

Weiter gilt noch der folgende

---

[1]) In den Sätzen vom TURÁNschen Typus folgern wir die Existenz gewisser Teilgraphen aus der Anzahl der Kanten, in den Sätzen vom ZARENKIEVICZ-DIRACschen Typus ist die untere Grenze der Valenzen der Knotenpunkte gegeben. Siehe noch die Arbeit [4] von GALLAI und mir.

Satz 3. *Es sei $n > c \cdot k$, wo c eine genügend große absolute Konstante ist. Dann enthält jedes $G^{(n)}_{\left[\frac{n^2}{4}\right]+k}$ k Dreiecke, die paarweise keine gemeinsame Kante haben.*

Wir wollen hier Satz 3 nicht beweisen. Der Beweis ist ähnlich dem Beweise, den ich in meiner Arbeit [7] benutzt habe.

Literaturverzeichnis

[1] P. Turán, Eine Extremalaufgabe aus der Graphentheorie (ungarisch mit deutscher Zusammenfassung). Mat. Fiz. Lapok **48**, 436–452 (1941).

[2] P. Turán, On the theory of graphs. Colloquium Math. **3**, 19–30 (1954).

[3] P. Erdös and A. H. Stone, On the structure of linear graphs. Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 1087 bis 1091 (1946).

[4] P. Erdös and T. Gallai, On maximal paths and circuits of graphs. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **10**, 337–356 (1959).

[5] P. Erdös and L. Pósa, On the maximal number of disjoint circuits of a graph. Erscheint in Publ. Math., Debrecen.

[6] Corrádi und Hajnal. Erscheint in Acta Math. Acad. Sci Hungar.

[7] P. Erdös, On a theorem of Rademacher-Turán. Illinois J. Math. **6**, 122–127 (1962).

Eingegangen am 20. 2. 1962

Anschrift des Autors:

P. Erdös
Abonyi u 8
Budapest XIV
Ungarn