Über einige Probleme der additiven Zahlentheorie *)

Von P. ERDÖS, Birmingham-Haifa

In diesem kleinen Vortrage werde ich über einige Probleme der additiven Zahlentheorie berichten, die mich in den letzten 25 Jahren viel beschäftigt haben. Im allgemeinen kann man diese Fragen mit kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden angreifen — von den endgültigen Lösungen sind wir aber noch in allen Fällen weit entfernt. Vor kurzem hielt ich über dieses Gebiet einen ausführlicheren Vortrag[1]), der auch ein ausführlicheres Literaturverzeichnis enthält.

1. Es sei $0 \leq a_1 < a_2 < \dots$ eine unendliche Folge ganzer Zahlen, $f(n)$ sei die Lösungszahl von $n = a_i + a_j$. Vor etwa 25 Jahren fragte mich S. SIDON, ob eine Folge $0 \leq a_1 < a_2 < \dots$ existiere, für welche $f(n) > 0$ für alle $n \geq 0$ und $f(n)/n^\varepsilon \to 0$ für alle $\varepsilon > 0$ gelte. Vor einigen Jahren gelang es mir, das Problem von SIDON bejahend zu lösen[2]); ich bewies nämlich, daß eine Folge a_i mit

$$c_1 \log n < f(n) < c_2 \log n$$

existiert. Den etwas schärferen Satz, ob es eine Folge mit

$$f(n)/\log n \to c, \qquad c > 0,$$

oder

$$f(n) > 0 \qquad \text{und} \qquad f(n)/\log n \to 0$$

gibt, kann ich bis jetzt nicht entscheiden, und meine Methoden, die in [1]) und [2]) angewendet werden, scheinen dazu nicht geeignet zu sein

Vor etwa 25 Jahren vermuteten TURÁN und ich[3]), daß, wenn für eine Folge a_i $f(n) > 0$ für alle $n > n_0$ erfüllt ist,

$$\limsup f(n) = \infty$$

gilt. Unsere Vermutung scheint recht tief zu liegen. Eine weitere Vermutung, die sie enthalten würde, ist die folgende: Es sei $a_k < ck^2$, $1 \leq k < \infty$; dann gilt $\limsup f(n) = \infty$. Hier kann ich nur $\limsup f(n) \geq 2$ beweisen[4]).

Ein allgemeineres Problem, das ich mit TURÁN betrachtet habe, ist das folgende: Wir setzen irgend etwas über die Folge $f(n)$ voraus und wollen beweisen,

---

*) Vortrag, gehalten auf der Vormittagssitzung am 23. 3. 1957.

[1]) Tagung über Zahlentheorie, Bruxelles, Dez. 1955.

[2]) Acta Szeged, **15**, 255—259 (1954), siehe auch [1]).

[3]) Journal London Math. Soc., **16**, 212—215 (1941).

[4]) Siehe STÖHR, Journal f. d. reine u. angew. Math., **194**, 40—65, 111—140 (1955).

daß keine Folge a_i existiert, die die obige Folge $f(n)$ realisiert. Ein hierher gehöriger Satz von FUCHS und mir[5]) besagt, daß es keine Folge a_i gibt, für welche ein $c > 0$ existiert, so daß

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(f(k) - c)^2 \to 0$$

gilt. Offenbar kann man hier sehr viele weitere Probleme stellen[6]).

2. MOSER und ich stellten uns folgendes Problem: Gibt es $n + 2$ ganze Zahlen $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+2} \leq 2^n$, so daß alle 2^{n+2} Summen

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon_k a_k, \qquad \varepsilon_k = 0 \text{ oder } 1,$$

verschieden sind? Trotz der scheinbaren Einfachheit scheint dieses Problem recht schwierig zu sein. [Einige hierher gehörige Resultate siehe in [1]).]

3. STRAUS und ich vermuteten im Jahre 1953, daß man zu jeder unendlichen Folge ganzer Zahlen $a_1 < a_2 < \ldots$ eine Folge $b_1 < b_2 < \ldots$ der Dichte 0 finden kann, so daß sich jede genügend große Zahl in der Form $a_i + b_j$ darstellen läßt. LORENTZ[7]) bewies dies, indem er zeigte, daß man die Folge b_j so wählen kann, daß

$$B(x) < c\sum_{k=1}^{n}\frac{\log A(k)}{A(k)} \tag{1}$$

ausfällt, wo $A(k)$ respektive $B(k)$ die Anzahl der a respektive der $b \leq k$ bedeutet. Wegen $A(k) \to \infty$ folgt aus (1) offenbar, daß $B(x)/x \to 0$.

Wenn die a die Primzahlen sind, so ergibt (1), daß eine Folge b_i mit $B(x) < c(\log x)^3$ existiert, so daß $n = p + b_i$ für alle genügend großen n lösbar ist. Herr LORENTZ fragte mich, ob sich dieses Resultat noch verschärfen lasse. Ich konnte zeigen[8]), daß es eine solche Folge mit $B(x) < c\,(\log x)^2$ gibt. Ich kann nicht entscheiden, ob sich dieses Resultat noch verschärfen läßt. Insbesondere könnte eine solche Folge mit $B(x) < c \log x$ existieren. Aus dem Primzahlsatz folgt, daß

$$\liminf B(x)/\log x \geq 1 \tag{2}$$

sein muß, ich kann aber nicht einmal

$$\limsup B(x)/\log x > 1$$

beweisen.

Als ich im April 1956 über diese Fragen in Jerusalem einen Vortrag hielt, fragte mich Herr HANANI, ob folgender allgemeinere Satz gelte (aus dem $\limsup B(x)/\log x > 1$ sofort folgen würde): Es seien $0 \leq a_1 < a_2 < \ldots,$

---

[5]) Journal London Math. Soc., **31**, 67—73 (1956).

[6]) [5]) enthält noch andere hierher gehörige Resultate.

[7]) Proc. Amer. Math. Soc., **5**, 838—841 (1954).

[8]) Ibid. 847—853.

$0 \leq b_1 < b_2 < \ldots$ zwei unendliche Folgen ganzer Zahlen, so daß sich jede genügend große Zahl in der Form $a_i + b_j$ darstellen läßt. Dann gilt

$$\limsup A(x)\, B(x)/x > 1. \tag{3}$$

Leider aber konnten wir (3) weder beweisen noch widerlegen.

Ich möchte jetzt noch einige triviale Bemerkungen zu (3) machen. Offenbar gilt in (3) $\geq$ statt $>$ (da die Anzahl der Lösungen von $a_i + b_j \leq x$ mindestens $x + O(1)$ ist). (3) ist offenbar falsch, wenn nicht beide Folgen unendlich sind (z. B. die a seien die geraden Zahlen und die b 0 und 1).

Etwas weniger trivial ist, daß in (3) $\liminf A(x)\, B(x)/x = 1$ sein kann, selbst wenn beide Folgen unendlich sind. Um dies zu sehen, sei $n_k \mid n_{k+1},\, n_{k+1}/n_k \to \infty$, eine sonst beliebige Folge ganzer Zahlen. Die Folge a_i bestehe aus den Zahlen

$$n_k \leq l_k < 2 n_k, \qquad 1 \leq k < \infty,$$

und die Folge b_i aus den Zahlen

$$n_k \leq t_k \leq 2 n_{k+1}, \qquad t_k \equiv 0 \bmod n_k, \qquad 1 \leq k < \infty.$$

Offenbar ist jedes $2n_k \leq n \leq 2n_{k+1}$ von der Form $l_k + t_k$, also jede Zahl $\geq 2n_1$ von der Form $a_i + b_j$. Und offenbar folgt aus der Tatsache, daß $n_{k+1}/n_k \to \infty$,

$$A(n_k) = (1 + o(1))\, n_{k-1}, \qquad B(n_k) = (1 + o(1))\, n_k/n_{k-1}.$$

Also

$$A(n_k)\, B(n_k)/n_k \to 1 \quad \text{q.e.d.}$$

О некоторых задачах аддитивной теории чисел

П. ЭРДЁШ, Бирмингам—Хайфа

Резюме

В этом небольшом докладе я рассматриваю некоторые простые задачи аддитивной теории чисел.

1) Отвечая на один вопрос СИДОНа, я строил последовательность целых чисел, $0 \leqq a_1 < a_2 < \ldots$ такую, что для всех n выполняется неравенство

$$c_1 \log n < f(n) < c_2 \log n,$$

где через $f(n)$ обозначено число решений уравнения $n = a_j + a_i$. Мы с ТУРАНом выдвинули гипотезу, что $\limsup_{n \to \infty} f(n) = \infty$, коль скоро $f(n) > 0$ для $n > n_0$.

2) Мы с МОЗЕРом поставили следующую задачу: существуют ли такие $n+2$ чисел $1 \leq a_1 < a_2 < \ldots < a_{n+2} \leq 2^n$, чтобы все 2^{n+2} суммы вида

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k a_k, \qquad \varepsilon(k) = 0 \text{ или } 1,$$

были различны? Этот вопрос кажется очень трудным.

3) Следующий вопрос был поставлен ХАНАНИ (Hanani). Пусть $a_1 < a_2 < \ldots$ и $b_1 < b_2 < \ldots$ — две бесконечные последовательности целых чисел. Пусть $A(x)$ есть число $a_i \leq x$ и $B(x)$ — число $b_i \leq x$. Предполагается, что любое $n > n_0$ представимо в виде $a_i + b_j$. Верно ли тогда, что

$$\limsup_{x \to \infty} A(x)\, B(x)/x > 1\,?$$

До сих пор я не смог решить этот вопрос.