Extrait de l'*Enseignement mathématique*, tome IV, fasc. 2, 1958.

SUR CERTAINES SÉRIES A VALEUR IRRATIONNELLE

par Paul Erdös, Birmingham-Haïfa

(Reçu le 1er avril 1958)

§ 1. En décembre 1956, à Birmingham, le professeur A. Oppenheim (Singapour) m'a posé le problème suivant. Soit p_n, $n = 1, 2 \ldots$, la suite des nombres premiers, la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n^k}{n!}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \tag{1}$$

est-elle irrationnelle ?

A ce sujet, je rappellerai le fait connu [1] que tout réel t, $0 < t \leqslant 1$, peut s'exprimer d'une et une seule manière sous la forme

$$t = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$$

avec $0 \leqslant c_n < n$ pour tout n et $c_n > 0$ pour une infinité de valeurs de n, et que t est rationnel si et seulement si

$$c_n = n - 1 \qquad \text{pour tout} \qquad n \geqslant n_0 \, .$$

Dans notre cas, ce théorème n'est pas applicable, puisque $p_n > n$ pour tout n. Toutefois la somme des séries (1) est bien irrationnelle; la démonstration étant assez compliquée pour $k > 1$, je ne donnerai au § 2 que la démonstration pour $k = 1$. Par contre, je démontrerai au § 3 un théorème qui généralise cette affirmation, les dénominateurs dans (1) étant remplacés par les produits des termes d'une suite croissante d'entiers quelconques.

Enfin, je tiens à souligner que je n'ai pas réussi à démontrer l'irrationnalité de la somme des séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n\, n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{2^n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n\, 2^n}.$$

Pour ce qui concerne l'irrationnalité des séries semblables, voir [2].

§ **2.** La démonstration de l'irrationnalité de la série (1) repose sur le fait que l'ensemble des nombres

$$\frac{p_n}{n} - \left[\frac{p_n}{n}\right], \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{2}$$

est dense dans l'intervalle (0, 1), ce que nous démontrerons à la fin de ce paragraphe.

Ceci posé, supposons par l'absurde que la valeur de la série (1), pour $k = 1$, est rationnelle, c'est-à-dire que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{n!} = \frac{a}{b}$$

avec a et b entiers.

Soit $k > b$; il est alors évident que

$$\frac{p_k}{k} + \frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{p_{k+2}}{k(k+1)(k+2)} + \cdots = (k-1)!\,\frac{a}{b}$$

est un entier positif et par suite

$$\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k}\right] + \frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \cdots \geqslant 1 .$$

Puisque la suite $\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k}\right]$ est dense dans (0, 1) il existe une infinité de k tels que

$$\frac{p_k}{k} - \left[\frac{p_k}{k}\right] \leqslant \frac{1}{2};$$

on aura donc pour ces valeurs de k,

$$\frac{p_{k+1}}{k(k+1)} + \frac{p_{k+2}}{k(k+1)(k+1)} + \cdots \geqslant \frac{1}{2}.$$

Or cette inégalité ne peut avoir lieu pour k suffisamment grand puisque $p_k = o(k^2)$, notre affirmation est ainsi démontrée.

Remarquons que nous avons incidemment démontré la proposition générale suivante:

Soit c_n *une suite d'entiers* > 0 *tels que*

$$n^{-2} c_n \longrightarrow 0 \, , \quad n \longrightarrow \infty \; ;$$

toutes les fois que la suite

$$\frac{c_n}{n} - \left[\frac{c_n}{n}\right] \tag{3}$$

ne tend pas vers l'unité, la somme de la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n\,!}$$

est irrationnelle.

Ainsi, il suffit d'établir que la suite (3) ne tend pas vers l'unité; or, pour $c_n = p_n$, on peut même montrer que la suite (2) est dense dans (0, 1), mais on est obligé de recourir au théorème des nombres premiers avec l'évaluation suivante du reste [3; pp. 46-51, 193-197, 238-242, 328-333]

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\log^2 x}\right) , \quad x \longrightarrow \infty \; ;$$

aussi il y aurait intérêt à voir si l'on peut obtenir une démonstration plus élémentaire.

Quant à la démonstration du fait que la suite (2) est dense dans (0, 1) on peut le déduire de la proposition connue [4; p. 17, Aufgaben 100-102]:

la suite

$$a_n - [a_n] \, , \quad n = 1, 2, \ldots ,$$

est dense dans (0, 1) si

$$a_n \longrightarrow \infty$$

et

$$a_{n+1} - a_n < o(1) \quad \text{lorsque} \quad n \longrightarrow \infty \, .$$

Pour vérifier cette dernière condition dans le cas où $a_n = \frac{p_n}{n}$, du fait que

$$\frac{p_{n+1}}{n+1} - \frac{p_n}{n} < \frac{p_{n+1} - p_n}{n},$$

il suffit de montrer que

$$p_{n+1} - p_n < o(n), \quad n \longrightarrow \infty .$$

Or, de

$$1 = \pi(p_{n+1}) - \pi(p_n) = \int_{p_n}^{p_{n+1}} \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{p_{n+1}}{\log^2 p_{n+1}}\right) + o\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right) >$$

$$> \frac{p_{n+1} - p_n}{\log p_{n+1}} + o\left(\frac{p_n}{\log^2 p_n}\right),$$

il résulte

$$p_{n+1} - p_n < \log p_{n+1} + o\left(\frac{p_n \log p_{n+1}}{\log^2 p_n}\right) = o\left(\frac{\log p_n}{p_n}\right),$$

et puisque $p_n \sim n \log n$, $n \to \infty$, l'affirmation en découle.

§ **3.** L'extension mentionnée de la proposition précédente exige une évaluation encore plus précise du reste dans le théorème des nombres premiers et qui est donnée par

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\log^r x}\right), \tag{4}$$

quel que soit $r > 0$. En outre, contrairement au cas traité au § 2, la démonstration de ce théorème utilise pleinement le fait que les p_n sont premiers.

Théorème. — *Soit* $1 < q_1 \leqslant q_2 \leqslant \ldots \leqslant q_n \leqslant \ldots$ *une suite d'entiers telle que pour un certain* k > 0 *on ait*

$$q_n > o\left(\frac{n}{\log^k n}\right), \tag{5}$$

et $\mathrm{p_n}$ *la suite des nombres premiers; alors la somme* t *de la série*

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n} \tag{6}$$

est rationnelle si et seulement si

$$q_n = q\, p_n + 1$$

pour un entier q $\geqslant 1$ *fixe et tout* n $\geqslant$ n$_0$.

DÉMONSTRATION. — Posons

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = \mathrm{N}_n + r_n\,, \quad n = 1,2, \cdots,$$

où, d'après (6), les N_n sont des entiers et

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} + \frac{p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \cdots .$$

Alors, d'après (5),

$$r_n = \frac{p_n}{q_n} + o\left(\frac{p_n}{q_n}\right), \tag{7}$$

puisque $p_n \sim n \log n$; d'autre part

$$r_{n+1} - r_n < o\,(1)\,, \quad n \longrightarrow \infty\,, \tag{8}$$

par le fait que

$$r_{n+1} - r_n < \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} + \frac{p_{n+2} - p_{n+1}}{q_n q_{n+1}} + \cdots,$$

et que, d'après un calcul analogue à celui du paragraphe précédent, la relation (4), avec $r = k + 2$, entraîne

$$p_{n+1} - p_n = o\,(n \log^{-k} n)\,, \quad n \longrightarrow \infty\,. \tag{9}$$

Ceci établi, montrons en premier lieu qu'aucun des points d'accumulation de la suite p_n/q_n ne peut être à valeur irrationnelle. A cet effet, supposons par l'absurde qu'on puisse extraire une suite partielle p_m/q_m, $m = n_i$, $i = 1, 2, \ldots$, qui tende vers un nombre irrationnel α. Dans ce cas, on aurait, d'après (7),

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{m-1} = \mathrm{N}_m + \frac{p_m}{q_m} + o\left(\frac{p_m}{q_m}\right) = \mathrm{N}_m + \alpha + o\,(1)\,,$$

ce qui est impossible lorsque t est rationnel.

En second lieu, montrons que la suite p_n/q_n ne peut avoir deux points d'accumulation distincts. En effet, si u et v étaient deux tels points, puisque d'après (5) et (9),

$$\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} - \frac{p_n}{q_n} \leqslant \frac{p_{n+1} - p_n}{q_n} = o(1) ,$$

il résulterait que tous les points situés entre u et v seraient des points d'accumulation [4; p. 17, Aufgaben 100-102], ce qui est en contradiction avec le fait démontré plus haut.

En troisième lieu, montrons que p_n/q_n tend nécessairement vers une limite finie. A cet effet, supposons par l'absurde que la suite p_n/q_n ne reste pas bornée; n'ayant qu'un seul point d'accumulation, cette suite, et par suite r_n, devrait tendre vers l'infini. Or, d'après (8) et la proposition citée au § 2, la suite $r_n - [r_n]$ serait dense dans (0, 1); il existerait donc une suite d'indices $n_i = m$ telle que

$$r_m - [r_m] \longrightarrow \beta ,$$

avec β irrationnel, et l'on aurait

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{m-1} = N_m + [r_m] + r_m - [r_m] = N_m + [r_m] + \beta + o(1) ,$$

ce qui est impossible pour t rationnel.

Ainsi, on peut poser

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{c}{q} + o(1) , \quad n \longrightarrow \infty ,$$

avec c et q entiers, et tels que $(c, q) = 1$ si $c \geqslant 1$, ou bien q arbitraire $\neq 0$ si $c = 0$, et, d'après (7), on obtient

$$r_n = \frac{c}{q} + o(1) .$$

Par suite,

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + \frac{c}{q} + o(1) ,$$

et cette relation ne peut avoir lieu pour les grandes valeurs de n que si

$$t\, q_1 q_2 \cdots q_{n-1} = N_n + \frac{c}{q} ,$$

pour tout $n \geqslant n_0$. Il s'en suit que, pour $n \geqslant n_0$,

$$r_n = \frac{c}{q} = \frac{p_n}{q_n} + \frac{c}{qq_n} + o\left(\frac{1}{q_n}\right),$$

d'où

$$c\,q_n = q\,p_n + c + o(1)\,.$$

Or cette relation ne pouvant avoir lieu non plus que si

$$c\,q_n = q\,p_n + c$$

à partir d'un certain n, il en découle que $c \geqslant 1$, et, puisque $(c, q) = 1$ et p_n est premier, il faut que $c = 1$; on a donc

$$q_n = q\,p_n + 1$$

pour un $q \geqslant 1$ fixe et à partir d'un n suffisamment grand.

C.q.f.d.

Je remarquerai enfin que la borne inférieure de la croissance des q_n, donnée par (5), n'est pas la plus précise possible et qu'elle dépend de l'évaluation du reste du théorème des nombres premiers. D'après Tatuzawa [5], le résultat le plus précis connu jusqu'à présent est

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t} + o\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right),$$

avec

$$\varphi(x) = \exp\left(-a\,(\log x)^{\frac{4}{7}}\,(\log\log x)^{-\frac{3}{7}}\right)$$

et où a est une constante positive, ce qui permet de remplacer (5) par

$$q_n > O\left(n \log^2 n/_{\varphi(n)}\right)\,.$$

Toutefois, il est fort probable que le théorème reste vrai sous l'unique hypothèse

$$1 < q_1 \leqslant q_2 \leqslant \cdots\,;$$

mais, déjà, le cas où $q_n = 2$, $n = 1, 2, \ldots$, m'échappe entièrement.

BIBLIOGRAPHIE

[1] G. Cantor, Ueber die einfachen Zahlensysteme. *Zeitschr. für Math. u. Phys.*, *14*, pp. 121-128 (1869) et *Gesammelte Abhand.*, Berlin, 1932, pp. 35-42.

[2] P. Erdös, On the irrationality of certain series. *Indag. Math.*, **19**, pp. 212-219 (1957).

[3] E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen* (B. G. Teubner, Leipzig, 1909).

[4] G. Polya und G. Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Springer, Berlin, Göttingen, Heidelberg (1954)).

[5] T. Tatuzawa, On the number of the primes in an arithmetic progression. *Jap. Journ. of Math.*, **21**, pp. 93-111 (1951).