Megjegyzések Kővári Tamás egy dolgozatához

ERDŐS PÁL

TURÁN vetette fel a következő kérdést: Létezik-e oly $f(z)$ egész függvény, amelynél az

$$f(z), f'(z), f''(z), \ldots$$

függvények gyökeinek egyesített halmaza mindenütt sűrű az egész síkon?

KŐVÁRI[1] e kérdésre igenlően válaszolt. A következőkben néhány ehhez kapcsolódó kérdéssel óhajtok foglalkozni.

Legyen $z_1, z_2, \ldots$ komplex számok tetszőleges sorozata. Elsősorban bebizonyítjuk, hogy létezik oly $f(z)$ egész függvény és $n_1 < n_2 < \cdots$ sorozat, hogy $f^{(n_k)}(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots$. Ezzel természetesen KŐVÁRI tételére új bizonyítást adtunk.

Legyen $n_l = 2^l - 1$, $l = 1, 2, \ldots$. Nyilván

$$n_l > n_1 + n_2 + \cdots + n_{l-1} + l - 1. \tag{1}$$

Legyen mármost

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{n_i+1}, \tag{2}$$

ahol a c_l konstansok oly gyorsan tartanak 0-hoz, hogy $f(z)$ egész függvény legyen (a c_l számok ily választása nyilván lehetséges). Könnyű belátni mármost, hogy $f^{(n_k)}(z_k) = 0$. Ugyanis

$$f(z) = f_{k,1}(z) + f_{k,2}(z), f_{k,1}(z) = \sum_{l=1}^{k-1} c_l \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{n_i+1},$$

$$f_{k,2}(z) = \sum_{l=k}^{\infty} c_l \prod_{i=1}^{l} (z - z_i)^{n_i+1}.$$

[1] Mat. Lapok VII (1956), 106—107.

(1) miatt $f_{k1}(z)$ n_k-adik differenciálhányadosa identikusan 0, $f_{k,2}^{(n_k)}(z)$ n_k-adik differenciálhányadosa viszont 0 a z_k helyen és ezzel tételünk be van bizonyítva.

Most a következő élesebb tételt bizonyítjuk be:

Legyen $z_1, z_2, \dots$ komplex számok tetszőleges sorozata. Legyen továbbá $n_1 < n_2 < \cdots$ egész számok tetszőleges sorozata, melynek komplementer sorozata $m_1 < m_2 < \cdots$ végtelen. Akkor létezik oly $f(z)$ egész függvény, melyre $f^{(n_k)}(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$.

Jelölje ugyanis $g_l(z)$ azon legfeljebb m_l-edfokú polinómot, melyre

$$(3) \qquad g_l^{(n_i)}(z_i) = 0, \quad \text{ha} \quad n_i < m_l$$

és mely nem identikusan 0. Nyilván ily polinóm létezik, minthogy a (3) alatti feltételek $m_l - l$ homogén lineáris egyenletrendszert adnak $m_l + 1$ ismeretlennel, s ennek míndig van nem triviális megoldása. Legyen mármost

$$f(z) = \sum_{l=1}^{\infty} c_l g_l(z)$$

ahol a c_l konstansok úgy lettek választva, hogy $f(z)$ egész függvény. Könnyű belátni, hogy $f^{(n_k)}(z_k) = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Legyen ugyanis

$$f(z) = f_{k,1}(z) + f_{k,2}(z), \; f_{k,1}(z) = \sum_{l=1}^{n_k - k} c_l g_l(z) + \sum_{n_k - k < l} c_l g_l(z).$$

(Az n_k-nál kisebb m-ek száma $n_k - k$.) Legyen m_s a legnagyobb m, mely n_k-nál kisebb, $s = n_k - k$. Akkor nyilván $f_{k,1}(z)$ legfeljebb m_s-edfokú és $m_s < n_k$, tehát $f_{k,1}^{(n_k)}(z_k) \equiv 0$. (3) miatt viszont $f_{k,2}^{(n_k)}(z_k) = 0$, s ezzel tételünk be van bizonyítva.

Ha az m_k sorozat üres vagy véges, úgy e bizonyítás nyilván nem érvényes — azonban a tétel sem igaz, mert mint GONCSAROFF [2] egy tételéből következik, nem mindig van oly identikusan 0 egész függvény, melyre $f^{(n)}(z_n) = 0$ (még akkor sem, ha a z_n-k mind

[2] *Recherches sur les dérivées successives des fonctions analytiques etc* Annales Sci l'École Normale 47 (1930), 1—78. GONCSAROFF e cikkében többek között a következő tételt bizonyítja be: Legyen $f(z)$ reguláris a 0 pont környezetében, továbbá $f^{(n)}(z_n) = 0$, $n = 1, 2, \dots, z_n \to 0$ és $\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+1} - z_n| < \infty$. Akkor $f(z) \equiv 0$. Lásd továbbá ERWE, Eine Interpolationsaufgabe, Archiv. der Math. VII (1956) 55—58.

különbözők). RÉNYI[3] és én nemrég bebizonyítottuk, hogy ha z_n jelenti $f^{(n)}(z)=0$ abszolút értékre nézve legkisebb gyökét, akkor

$$\limsup n|z_n|=\infty, \tag{4}$$

ami persze mutatja, hogy a z_n-eket nem lehet tetszőlegesen előírni. RÉNYIvel[3] azt is kimutattuk, hogy (4) bizonyos szempontból nem élesíthető, azaz ha $A_n\to\infty$, létezik oly z_n sorozat és egy nem identikusan eltűnő $f(z)$ egész függvény, melyre $n|z_n|<A_n$ és $f^{(n)}(z_n)=0$.

ERWE[2] cikkében említi azon kérdést, mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék oly $f(z)$ egész függvény, melyre $f^{(n)}(z_n)=0$, $n=1,2,\ldots$? Erre egyelőre nem tudok válaszolni, csak a következő triviális megjegyzést szeretném tenni: Ha a z_n sorozatnak nincs a végesben sűrűsödési helye, úgy ily $f(z)$ mindig létezik. Legyen ugyanis $f(z)$ azon egész függvények valamelyike, melynek a z_n helyen $(n+1)$-edrendű gyöke van $n=1,2,\ldots$ esetén. Nyilván $f^{(n)}(z_n)=0$ minden n-re.

Most még két problémát szeretnék megemlíteni, melyeknek egyikét sem tudom megoldani.

1. Létezik-e oly $f(z)$ egész függvény, mely a következő tulajdonsággal bír: Legyen $n_1<n_2<\cdots$ tetszőleges végtelen sorozat, akkor az $f^{(n_k)}(z)=0$ gyökeinek egyesítési halmaza mindenütt sűrű az egész síkon? Könnyű belátni, hogy ily függvény akkor és csak akkor létezik, ha minden $|z-z_0|<r$ körhöz van oly $n_0=n_0(z_0,r)$, hogy minden $n>n_0$-ra $f^{(n)}(z)=0$-nak van gyöke a $|z-z_0|<r$ körben.

2. Legyen $H_1, H_2, \ldots$ halmazok tetszőleges végtelen sorozata. Tegyük fel, hogy egyetlen H_k-nak sincs a végesben sűrűsödési pontja. Létezik-e oly $f(z)$ egész függvény és $n_1<n_2<\cdots$ sorozat, hogy az $f^{(n_k)}(z)=0$ gyökeinek halmaza tartalmazza H_k-t minden k-ra? Könnyű belátni, hogy ha a H_k halmazok mind végesek, akkor ily $f(z)$ létezik.

ЗАМЕЧАНИЯ В СВЯЗИ С ОДНОЙ РАБОТОЙ Т. КЁВАРИ

П. Эрдёш

Пусть $z_1, z_2, \ldots$ есть любая последовательность комплексных чисел, а $n_1<n_2<\cdots$ любая бесконечная последовательность, дополнительная к которой также бесконечна. Автор доказывает, что существует такая целая

[3] RÉNYIvel való cikkünk rövidesen megjelenik az Acta Math. Hungarica-ban.

функция $f(z)$, что $f^{(n_k)}(z_k)=0$ при $k=1, 2, \ldots$. Ставятся следующие две проблемы: 1. Пусть $H_1, H_2, \ldots$ есть бесконечная последовательность множеств. Но одно из H_k не имеет конечных точек слущения. Доказать, что всегда существует последовательность натуральных $n_1 < n_2 < \cdots$ и целая функция $f(z)$ такие, что корни $f^{(n_k)}(z)=0$ содержат H_k при $k=1, 2, \ldots$. 2. Доказать, что существует такая целая функция $f(z)$, что для всех рослеловательностей $n_1 < n_2 < \cdots$ соединение множеств корней $f^{(n_k)}(z)=0$ всюду плотно на плоскости.

REMARKS ON A PAPER OF T. KŐVÁRI

by P. Erdős

Let $z_1, z_2, \ldots$ be an arbitrary sequence of complex numbers and $n_1 < n_2 < \cdots$ an arbitrary infinite sequence whose complementary sequence is infinite. The author proves that there exists an entire function $f(z)$ so that $f^{(n_k)}(z_k)=0$ for $k=1, 2, \ldots$.

The following two problems are raised: 1. Let $H_1, H_2, \ldots$ be an infinite sequence of sets. No H_k has a finite limit point. Does there always exist a sequence of integers $n_1 < n_2 < \cdots$ and an entire function $f(z)$ so that the roots of $f^{(n_k)}(z)=0$ contains H_k for $k=1, 2, \ldots$. 2. Does there exist an entire function $f(z)$, so that for every sequence $n_1 < n_2 < \cdots$ the union of the set of all the roots of $f^{(n_k)}(z)=0$ is everywhere dense in the plane.