A magasabb rendű számtani sorokról.

A közönséges aritmetikai sort elsőrendű aritmetikai sornak mondjuk, mert a szomszédos tagok közötti különbség állandó. A másodrendű aritmetikai sor oly sor, melynél a szomszédos tagok különbségének sora, az u. n. differencia sora elsőrendű aritmetikai sor.

n-ed rendű aritmetikai sor az olyan sor, melynek első differencia sora $(n-1)$-ed, második differencia sora $(n-2)$-ed, ... $(n-1)$-dik differencia sora pedig elsőrendű aritmetikai sor.

Legyenek tehát

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \; \ldots$$

egy n-ed rendű aritmetikai sor tagjai, melynek első differencia sora:

$$\Delta_1^{(1)} \qquad \Delta_2^{(1)} \qquad \Delta_3^{(1)} \; \ldots$$

2-dik differencia sora: $\Delta_1^{(2)} \qquad \Delta_2^{(2)} \qquad \ldots$

3-dik „ „ $\Delta_1^{(3)} \qquad \Delta_2^{(3)} \; \ldots$

ahol $\Delta_1^{(1)} = a_2 - a_1; \quad \Delta_2^{(1)} = a_3 - a_2; \quad \Delta_3^{(1)} = a_4 - a_3 \; \ldots$

$$\Delta_1^{(2)} = \Delta_2^{(1)} - \Delta_1^{(1)}; \quad \Delta_2^{(2)} = \Delta_3^{(1)} - \Delta_2^{(1)}; \quad \Delta_3^{(2)} = \Delta_4^{(1)} - \Delta_3^{(1)}$$

$$\Delta_1^{(3)} = \Delta_2^{(2)} - \Delta_1^{(2)}; \quad \Delta_2^{(3)} = \Delta_3^{(2)} - \Delta_2^{(2)}; \quad \Delta_3^{(3)} = \Delta_4^{(2)} - \Delta_3^{(2)} \; \ldots$$

$$\vdots$$

A természetes számsor tagjainak köbei például harmadrendű aritmetikai számsort alkotnak:

	0		1		8		27		64		125 ...
első differencia sora:		1		7		19		37		61 ...	
2-ik „ „			6		12		18		24 ...		
3-ik „ „				6		6		6 ...			

Két alapvető feladat merül fel: az r-dik tag és az első r tag összegének meghatározása.

1°. Határozzuk meg az n-ed rendű aritmetikai sor r-dik tagját.

$$a_1 = a_1$$
$$a_2 = a_1 + \Delta_1^{(1)},$$
$$a_3 = a_2 + \Delta_2^{(1)}.$$

Behelyettesitve a_2 és $\Delta_2^{(1)} = \Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}$ értékeket,

$$a_3 = a_1 + 2\Delta_1^{(1)} + \Delta_1^{(2)}.$$

Ép így $\quad a_4 = a_3 + \Delta_3^{(1)};$

mivel azonban $\quad \Delta_3^{(1)} = \Delta_2^{(1)} + \Delta_2^{(2)}; \quad \Delta_2^{(2)} = \Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)}$

$$a_4 = a_1 + 3\Delta_1^{(1)} + 3\Delta_1^{(2)} + \Delta_1^{(3)}$$
$$a_5 = a_1 + 4\Delta_1^{(3)} + 6\Delta_1^{(2)} + 4\Delta_1^{(3)} + \Delta_1^{(4)}$$
$$\vdots$$

Látjuk tehát, hogy a sor tagjait a sor első, és az egymásután következő differencia sorok első tagjaiból képezzük és együtthatókul a binomiális koefficiensek lépnek fel. — Most teljes indukcióval fogjuk bebizonyítani, hogy ez általánosságban is így van.

Bebizonyítjuk, hogyha a képezési szabály az r-dik tagra áll, akkor érvényes az $(r+1)$-dik tagra is.

Legyen $\quad a_r = a_1 + \binom{r-1}{1}\Delta_1^{(1)} + \binom{r-1}{2}\Delta_1^{(2)} + \binom{r-1}{3}\Delta_1^{(3)} + \ldots$

és $\quad \Delta_r^{(1)} = \Delta_1^{(1)} + \binom{r-1}{1}\Delta_1^{(2)} + \binom{r-1}{2}\Delta_1^{(3)} + \ldots$

Minthogy $\quad a_{r+1} = a_r + \Delta_r^{(1)},$

és Pascal tétele szerint:

$$\binom{r-1}{k} + \binom{r-1}{k-1} = \binom{r}{k},$$

lesz: $$a_{r+1} = a_1 + \binom{r}{1}\Delta_1^{(1)} + \binom{r}{2}\Delta_1^{(2)} + \binom{r}{3}\Delta_1^{(3)} + \ldots \qquad \text{I.}$$

Ezzel tételünk igazolva van.

2°. Határozzuk meg az n-ed rendű aritmetikai sor első r tagjának összegét. Képezzük tehát a következő összegeket:

$$S_0 = 0$$
$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_r = a_1 + a_2 + \ldots + a_r.$$

Az $S_0 = 0$ kezdőtagot itt célszerűség okáért vezettük be, nevezetesen azért, hogy a differencia sorok első tagjai ugyanazok maradjanak!

Nyilvánvaló, hogy az S-k $(n+1)$-ad rendű aritmetikai sort alkotnak, mivel differencia soruk:

$$a_1,\ a_2,\ a_3\ \ldots$$

n-ed rendű aritmetikai sor. Kimondhatjuk tehát, hogy az S-ek 0-sal kezdődő $(n+1)$-ed rendű aritmetikai sorának $(r+1)$-dik tagja megadja az eredeti n-ed rendű sor első r tagjának összegét, azaz alkalmazva az I.-et

$$S_r = 0 + \binom{r}{1}a_1 + \binom{r}{2}\Delta_1^{(1)} + \binom{r}{3}\Delta_1^{(2)} + \binom{r}{4}\Delta_1^{(3)} + \ldots \qquad \text{II.}$$

ahol a_1 az n-ed rendű sor első tagja s. i. t.

Számítsuk ki ennek alapján a természetes számsor négyzeteinek összegét; vagyis meg kell határozni a következő 3-ad rendű sor $r+1$-dik tagját:

	0		1		5		14		30 . . .
első differencia sora:		1		4		9		16 . . .	
2-ik „ „			3		5		7 . . .		
3-ik „ „				2		2 . . .			

$$S_r^{(2)} = 0 + \binom{r}{1} 1 + \binom{r}{2} 3 + \binom{r}{3} 2 = \frac{r(r+1)(2r+1)}{6}.$$

Állapítsuk meg ugyancsak a II. alapján a természetes számsor köbeinek összegét:

	0		1		9		36		100 . . .
első differencia sora:		1		8		27		64 . . .	
2-ik „ „			7		19		37 . . .		
3-ik „ „				12		18 . . .			
4-ik „ „					6 . . .				

A sor összege $S_r^{(3)} = 0 + \binom{r}{1} 1 + \binom{r}{2} 7 + \binom{r}{3} 12 + \binom{r}{4} 6 = \left[\frac{r(r+1)}{2}\right]^2.$

Budapest, 1927.

Erdős Pál
Szent-István rg. VI. o t.