Egy gyönyörű példa a súlyátrendező módszer (discharging method) alkalmazására.

**Tétel.** (Ackerman–Tardos) *Tegyük fel, hogy a $G$ $n$ csúcsú és $e$ élű gráfot úgy rajzoltuk le a síkra, hogy az élei szakaszok, és nincs három páronkent metsző él. Ekkor $e \leq 19n$.*

**Bizonyítás.** Elég bebizonyítani, hogy minden ilyen gráfnak van legfeljebb 19 fokú csúcsa, ebből teljes indukcióval adódik az állítás.

Tegyük fel, hogy $G$ teljesíti a feltételeket, $n$ csúcsa van, és minden csúcs foka legalább 20. Tegyünk $G$ éleinek a metszéspontjaiba is csúcsokat, és megfelelően daraboljuk fel $G$ éleit. A kapott síkba rajzolt gráf legyen $G'$. $G'$–nek kétféle csúcsa van, *régi csúcsok*, amelyek $G$–nek is csúcsai, és *új csúcsok*, amelyek kereszteződésből származnak. Jelölje $N$, $E$ és $T$ $G'$ csúcsainak, éleinek, és tartományainak a számát. Legyenek $v_1, v_2, \ldots, v_N$ $G'$ csúcsai, $f_1, f_2, \ldots, f_T$ $G'$ tartományai (az egyik közülük a nem korlátos tartomány). Tetszőleges $v_i$ csúcsra legyen $d(v_i)$ $v_i$ foka, és tetszőleges $f_i$ tartományra legyen $|f_i|$ $f_i$ határoló éleinek a száma (ha egy él mindkét oldalról határol egy tartományt, akkor kétszer számoljuk). Egy $f_i$ tartományt $a$-$b$–szögnek nevezünk, ha $|f_i| = b$, és a határán $a$ darab régi, és $b - a$ darab új csúcs van.

Rendeljük hozzá minden $v_i$ csúcshoz a $d(v_i) - 4$ súlyt, és minden $f_i$ tartományhoz az $|f_i| - 4$ súlyt.

Számoljuk ki az összes súly összegét.

$$\sum_{i=1}^{N}(d_i - 4) + \sum_{i=1}^{T}(|f_i| - 4) = \sum_{i=1}^{N} d_i - 4\sum_{i=1}^{N} 1 + \sum_{i=1}^{T} |f_i| - 4\sum_{i=1}^{T} 1 = 2E - 4N + 2E - 4T = -8$$

az Euler formula miatt. Most pedig két lépesben átrendezzük a súlyokat úgy, hogy minden súly 0 vagy pozitív lesz. Ezzel ellentmondásra jutunk.

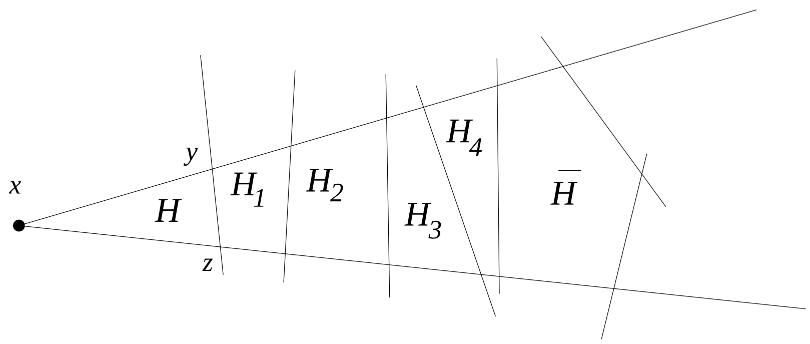
1. Minden régi csúcs adjon 4/5 súlyt minden szomszédos cellának. Tekintsünk egy $v_i$ régi csúcsot. Ennek az eredeti súlya $d(v_i) - 4$, tehát a jelenlegi súlya $d(v_i) - 4 - 4d(v_i)/5 \geq 0$, mert $d(v_i) \geq 20$. Az új csúcsok súlya 0. A tartományok közül eddig csak a háromszögeknek volt negatív súlya, ezek közül a 3–háromszögek súlya most $7/5$, a 2–háromszögeké $3/5$, az 1–háromszögeké $-1/5$, 0–háromszögek pedig nincsenek, mert az $G$–ben három páronként metsző élet jelentene. Tehát már csak az 1–háromszögeken kell segítenünk.

Legyen $H$ egy 1–háromszög, $x$ a régi csúcsa, $y$ és $z$ az új csúcsok. Legyen $H_1$ az a tartomány, ami az $yz$ oldal másik oldalán van. Ha $H_1$ nem 0–négyszög, akkor legyen $\overline{H} = H_1$ és álljunk meg. Ha $H_1$ egy 0–négyszög, akkor legyen $H_2$ az a tartomány, amely $H_1$–et ellenkező oldalról határolja, mint $H$. Ha $H_2$ nem 0–négyszög, akkor legyen $\overline{H} = H_2$ és álljunk meg. Ha $H_2$ is egy 0–négyszög, akkor legyen $H_3$ az a tartomány, amely $H_2$–t ellenkező oldalról határolja, mint $H_1$. Így lépkedjünk egészen addig, míg egy olyan $\overline{H} = H_i$ tartományt találunk, ami nem 0–négyszög. Nevezzük a $\overline{H}$ tartományt *$H$ segítőjének.*

2. Minden $H$ 1–háromszög kapjon 1/5 súlyt a segítőjétől, $\overline{H}$–tól.

Világos, hogy egy segítő, $\overline{H}$, nem lehet háromszög, mert akkor $G$–ben két egy csúcsból induló él metszené egymást, vagy a másik végpontjuk is közös lenne. Ha $\overline{H}$ négyszög, akkor nem 0–négyszög, ezért az első átrendezés után a súlya legalább 4/5, és legfeljebb 4 darab 1–háromszögnek lehet a segítője, tehát a súlya továbbra sem negatív. Ha $\overline{H}$ egy $a$-$b$–szög, $b \geq 5$, akkor súlya az első átrendezés utan $b - 4 + 4a/5$, és legfeljebb $b$ darab 1–háromszögnek lehet a segítője, ezért a súlya a második átrendezés után legalább $b - 4 + 4a/5 - b/5 \geq b - 4 - b/5 \geq 0$ mert $b \geq 5$. Tehát a második átrendezés után minden csúcsnak és minden tartománynak a súlya pozitív vagy 0. Ez ellentmondás, mert a súlyok összege $-8$. Tehát nem lehetséges, hogy $G$–ben minden csúcs foka legalább 20.

Ha pedig van egy legfeljebb 19 fokú csúcs, akkor ezt elhagyva indukcióval adódik, hogy $e \leq 19n$.




**Megjegyzés.** 1. Egy kicsit bonyolultabb számolással sokkal jobb korlát adódik, $e \leq 6.5n - 20$. Ez majdnem pontos, a legjobb alsó korlát $\lceil 6.5n - 29 \rceil$. Vagyis van olyan egyenes vonalakkal lerajzolt $n$ csúcsú gráf, amelynek nincs három páronként metsző éle, és $\lceil 6.5n - 29 \rceil$ éle van.