Kuratowski tétel, Fáry-Wagner tétel

Tekintsünk egy tetszőleges G gráfot, és annak egy $e = xy$ élét. Legyen G' az a gráf, amelyet úgy kapunk G-ből, hogy G-hez hozzáveszünk egy új csúcsot, z-t, elhagyjuk az e élet, es behúzzuk az xz és zy éleket. Vagyis egy élet helyettesítünk egy 2 hosszú úttal. Most tekintsük ennek az ellenkezőjet, ha G-ben z foka kettő és a szomszédai x és y, akkor hagyjuk el z-t, és húzzuk be az xy élet. Nyilvánvaló, hogy ezek a műveletek nem valtoztatják meg egy gráf síkbarajzolhatóságát.

Definíció. Két gráfot topologikusan izomorfnak nevezünk, ha a fenti két művelet alkalmazásával el lehet jutni az egyikből a másikba.

Könnyű ellenőrizni, hogy ez egy ekvivalencia reláció. A K_5-tel topogikusan izomorf gráfokat röviden topologikus K_5-nek is hívjuk. Ezeket a gráfokat úgy kaphatjuk meg, hogy egy K_5 minden élét helyettesítjük egy-egy tetszőlegesen hosszú úttal. Az eredeti, 4-fokú csúcsokat a topologikus K_5 fő csúcsainak hívjuk. Hasonlóan, a $K_{3,3}$-mal topogikusan izomorf gráfokat úgy kaphatjuk meg, hogy egy $K_{3,3}$ minden élét helyettesítjük egy-egy tetszőlegesen hosszú úttal. Az eredeti, 3-fokú csúcsokat a topologikus $K_{3,3}$ fő csúcsainak hívjuk.

Kuratowski tétel (Kuratowski 1930) *Egy gráf akkor és csak akkor síkbarajzolható, ha nem tartalmaz sem topologikus K_5-öt, sem topologikus $K_{3,3}$-mat.*

Fáry-Wagner tétel (Fáry 1948, Wagner 1936) *Minden síkgráf lerajzolható a síkra metszés nélkül úgy, hogy minden éle egyenes szakasz.*

A Kuratowski tétel esetén a szükségesség nyilvánvaló, hiszen K_5 és $K_{3,3}$ nem síkbarajzolhatók. Az elégségesség, illetve a Fáry-Wagner tétel az alábbi három, Thomassentől származó (1980) lemmából következik.

Legyen a G egyszerű gráf egyik éle e, végpontjai x és y. Az e él összehúzásával kapott gráfot G/e-vel jelöljük. Ezt úgy kapjuk G-ből, hogy az x és y csúcsokat helyettesítjük egy v_{xy} csúccsal, amelyet összekötünk x és y szomszédaival.

1. Lemma *Legyen G egy 3-összefüggő és legalább 5 csúcsú gráf. Ekkor van olyan e éle, hogy G/e is 3-összefüggő.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy nincs ilyen e él. Ekkor minden xy élre G/xy-nak van két elvágó pontja. Mivel G 3-összefüggő, a két elvágó pont egyike v_{xy}, amit x és y összehúzásával kaptunk. Legyen a másik z. Ekkor $\{x, y, z\}$ egy elvágó ponthalmaz G-ben. Mivel G 3-összefüggő, $\{x, y, z\}$ semelyik részhalmaza sem elvágó ponthalmaz, ezért x, y, és z mindegyikének van szomszédja $G \setminus \{x, y, z\}$ minden C komponensében. Válasszuk az xy élet és a C komponenst úgy, hogy C a lehető legkisebb legyen. Legyen v z egy szomszédja C-ben. A feltétel szerint G/zv sem 3-összefüggő, ezért megint van egy w csúcs, amelyre $\{z, v, w\}$ egy elvágó ponthalmaz, és ahogy az előbb, z, v, és w mindegyikének van szomszédja $G \setminus \{z, v, w\}$ minden komponensében.

Mivel x és y össze vannak kötve, $G \setminus \{z, v, w\}$-nek ugyanabban a komponensében vannak, tehát van egy olyan D komponens, amelyben egyik sincs benne. Nyilván z sincs benne D-ben. A v csúcs minden z-től különböző szomszédja C-ben van, tehát $C \cap D \neq \emptyset$. Mivel C csak x-en, y-on és z-n keresztül érintkezik G többi részével, $D \subset C$, de $v \in C$, és $v \notin D$, így D kisebb, mint C, ellentmondás.

Definíció. Egy síkgráf lerajzolását konvex lerajzolásnak nevezzük, ha az élek egyenes szakaszok, nem metszik egymást, és minden tartomány határa (a nem korlátosé is) egy konvex sokszög.

2. Lemma *Legyen G egy 3-összefüggő gráf, amely nem tartalmaz topologikus K_5-öt és topologikus $K_{3,3}$-at. Ekkor G-nek van konvex lerajzolása.*

Bizonyítás. A csúcsszámra vonatkozó indukcióval bizonyítunk. Ha $|V(G)| = n = 4$ vagy 5, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n \geq 6$ és kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Az 1. Lemma alapján van olyan $e = xy$ él, amelyre $G' = G/xy$ is 3-összefüggő. Legyen z az x és y összehúzásával kapott csúcs. Ha G' tartalmaz topologikus K_5-öt vagy topologikus $K_{3,3}$-at, akkor könnyű ellenőrizni, hogy G is tartalmaz. (Vigyázat, ha G' topologikus K_5-öt tartalmaz, akkor lehet, hogy G topologikus $K_{3,3}$,-at!) Tehát G' nem tartalmaz topologikus K_5-öt és $K_{3,3}$-at, ekkor viszont az indukciós feltevés alapján G'-nek van konvex lerajzolása. $G' \setminus z$ 2-összefüggő, ezért $G' \setminus z$ lerajzolásában a z pontot tartalmazó cella határa egy C kör. C az eredeti G gráfban is kör, és ezen vannak x és y szomszédai (kivéve persze x-et és y-t). Legyenek $x_1, \ldots x_k$ x szomszédai C-n, órajárás szerinti sorrendben, és legyen P_i C x_i és x_{i+1} közötti szakasza, a végpontokkal együtt. (Az indexeket ciklikusan értjük, $x_1 = x_{k+1}$, $P_1 = P_{k+1}$.) Ha valamilyen i-re, P_i tartalmazza y összes (x-től különböző) szomszédját, akkor könnyen megkaphatjuk G konvex lerajzolását, tegyük x-et z helyére, és y-t nagyon közel hozzá. (Abban az esetben ha C a nem korlátos tartomány határa, kicsit óvatosabbnak kell lenni.) Ha nem ez a helyzet, akkor vagy (i) $x_1, \ldots x_k$ közül legalább három y-nak is szomszédja, vagy (ii) van olyan x_i, x_j és y-nak olyan u, v, szomszédja, hogy ez négy különböző csúcs, és C-n ezek az ux_ivx_j sorrendben szerepelnek. Az első esetben G tartalmaz egy topologikus K_5-öt (a fő csúcsok x, y, és a három közös szomszéd), a második esetben G tartalmaz egy topologikus $K_{3,3}$-at (a fő csúcsok x, y, ux_ivx_j).

Ezzel készen vagyunk 3-összefüggő gráfokra. A 3. lemmából következik az állítás a többi gráfra.

Vegyük észre, hogy a K_5 4-összefüggő, $K_{3,3}$ pedig 3-összefüggő, ennek alapján egy topologikus K_5-ből 3 pontot elhagyva a megmaradt fő csúcsok egy komponensben maradnak, egy topologikus $K_{3,3}$-ból 2 pontot elhagyva a megmaradt fő csúcsok egy komponensben maradnak. Sőt könnyen ellenőrizhető, hogy egy topologikus $K_{3,3}$-ból 3 pontot elhagyva is csak egy fő csúcsot lehet leválasztani a többiről.

3. Lemma *Tegyük fel, hogy G-nek legalább 4 csúcsa van, és nem tartalmaz topologikus K_5-öt és $K_{3,3}$-at, de bármely élet hozzávéve már valamelyiket tartalmazza. Ekkor G 3-összefüggő.*

Bizonyítás. Megint a csúcsszámra vonatkozó indukcióval bizonyítunk, ha $|V(G)| = n = 4$ vagy 5, akkor az állítás triviális. Tegyük fel, hogy $n \geq 6$ es kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Nem nehéz látni, hogy G 2-összefüggő, és ha $\{x, y\}$ egy elvágó halmaz, akkor x és y össze vannak kötve. Tegyük fel, hogy G nem 3-összefüggő. Ekkor van egy $\{x, y\}$ egy elvágó halmaza, és x, y össze vannak kötve. Legyen $G = G_1 \cup G_2$, ahol G_1-nek és G_2-nek legalább 3 csúcsa van, két közös csúcsuk és egy közös élük van, x , y, és xy. Ha hozzáadunk egy élet G_i-hez ($i = 1, 2$), akkor keletkezik egy topologikus K_5 vagy $K_{3,3}$, és nem nehéz látni, hogy ez teljes egészében G_i-ben van. Ezért G_i vagy egy háromszög, vagy az indukciós feltevés miatt 3-összefüggő. Ekkor viszont a 2. Lemma szerint van konvex lerajzolásuk. Legyen z_i G_i egy csúcsa, amely a lerajzolásban x-szel és y-nal azonos tartomány határán van. A feltétel szerint $G + z_1z_2$ tartalmaz egy K topologikus K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at. A 3. Lemma előtti megállapítás miatt ekkor G_1 (vagy G_2) legfeljebb egy fő csúcs kivételével az összeset tartalmazza. (Ha K topologikus K_5, akkor ráadásul G_1 az összes fő csúcsot tartalmazza.) Ekkor viszont abban a G_1' gráfban is találhatunk topologikus K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at, amelyet G_1-ből úgy kapunk, hogy egy új csúcsot összekötünk x-szel, y-nal, és z_1-gyel. Csakhogy ezek a csúcsok mind G_1-ben ugyanannak a tartománynak a határán vannak, ezért G_1' is síkbarajzolható, ami ellentmond annak, hogy tartalmaz egy topologikus K_5-öt vagy $K_{3,3}$-at.