Bebizonyítjuk az Erdős–Szekeres tételt a 3-uniform hipergráfokra vonatkozó Ramsey tétel segítségével.

Tétel. (Erdős–Szekeres 1935) *Minden n–hez létezik olyan (legkisebb) $N = N(n)$, amelyre a következő teljesül. Tetszőleges N elemű ponthalmaz a síkon, amelyben nincs három pont egy egyenesen, tartalmaz n pontot, amelyek konvex helyzetben vannak.*

A bizonyításhoz a Ramsey tétel 3–uniform hipergráfokra vonatkozó változatát fogjuk használni. (3-uniform hipergráf: a csúcsok halmaza egy tetszőleges halmaz, az élek halmaza a csúcsokból alkotható hármasok egy halmaza. Teljes 3-uniform hipergráf: az összes lehetséges csúcs–hármas él.)

Ramsey Tétel. *Minden k, l–hez létezik olyan (legkisebb) $R = R_3(k, l)$, amelyre a következő teljesül. Ha az R csúcsú teljes 3-uniform hipergráf éleit kiszínezzük pirossal és kékkel, akkor van olyan n csúcs, amin az összes él (csúcs–hármas) ugyanolyan színű.*

Erdős–Szekeres tétel bizonyítása. (Johnson 1986) Tekintsünk $N = R_3(n, n)$ pontot a síkon, tegyük fel, hogy nincs három egy egyenesen. Színezzünk egy (x, y, z) ponthármast *pirossal*, ha az xyz háromszög a többi pont közül *páros* sokat tartalmaz, és *kékkel*, ha *páratlan* sokat. A Ramsey tétel alapján található n pont úgy, hogy az általuk meghatározott hármasok mind egyforma színűek. Állítás: ez az n pont konvex helyzetben van. Tegyük fel, hogy nem. Ekkor van köztük négy, x, y, z és w úgy, hogy w az xyz háromszögben van. A feltétel szerint mind a négy háromszög, amit x, y, z és w meghatároz, ugyanolyan színű. Ha piros, akkor az xyw, yzw, zxw háromszögek mindegyikében páros sok pont van a ponthalmazunkból. De ekkor az xyz háromszögben levő pontok száma három páros szám összege plusz a w pont, ami páratlan, ellentmondás! Hasonlóan járhatunk el, ha a háromszögek kékek, ezt az olvasóra bízom. Ennyi a bizonyítás.

Megjegyzés. Ebből az Erdős–Szekeres tételben szereplő $N(n)$ számra dupla exponenciális korlát adódik:

$$N(n) \leq R_3(n, n) \leq 2^{2^{cn}}$$

valamilyen c konstansra.

A legjobb korlátok $N(n)$–re szimplán exponenciálisak:

$$2^{n-2} + 1 \leq N(n) \leq \binom{2n-5}{n-3} + 1.$$