Erdős – De Bruijn tétel, véges projektív síkok, $K_{2,2}$–mentes gráfok

Erdős – De Bruijn tétel (1948) *$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$, minden $A \in \mathcal{F}$–re $|A| \geq 2$, és tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ekkor $|\mathcal{F}| = 1$ vagy $|\mathcal{F}| \geq n$.*

($[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$, $2^{[n]}$ $[n]$ összes részhalmazának a halmaza.)

Bizonyítás.

Legyen $\mathcal{F} = \{A_1, A_2, \ldots A_m\}$. Definiáljuk $([n], \mathcal{F})$ $([m], \mathcal{G})$ *duális hipergráfját* a következő módon. Az alaphalmaz $[m]$, $\mathcal{G} = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, $i \in B_j$ akkor és csak akkor, ha $j \in A_i$. Vagyis az alaphalmaz elemeinek halmazokat feleltetünk meg, a halmazrendszer halmazainak meg az új alaphalmaz elemeit.

Állítás: Az $([m], \mathcal{G})$ halmazrendszerben minden halmaz legfeljebb egyszer szerepel, vagyis $i \neq j$ esetén $B_i \neq B_j$. Tegyük fel hogy nem így van, mondjuk $B_1 = B_2$. ekkor az eredeti $([n], \mathcal{F})$ hipergráfban az 1–et és 2–t pontosan ugyanazok a halmazok tartalmazzák. De a feltétel szerint pontosan egy ilyen A halmaz lehet. Ha $A = [n]$, akkor a feltételből következik, hogy más halmaz nincs $\mathcal{F}$–ben. Tehát feltehetjük, hogy $A \neq [n]$, mondjuk A nem tartalmazza a 3–at. Megint a feltétel szerint pontosan egy olyan $A' \in \mathcal{F}$ van, amely tartalmazza az 1–et, és a 3–at. De mivel az 1–et és 2–t pontosan ugyanazok a halmazok tartalmazzák, $2 \in A'$. Viszont ekkor 1–et és 2–t A is, és A' is tartalmazza, ami ellentmond a feltételnek. Ezzel beláttuk, hogy az $([m], \mathcal{G})$ halmazrendszerben minden halmaz legfeljebb egyszer szerepel.

A felétel szerint tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ számokhoz pontosan egy $A \in \mathcal{F}$ van, amelyre $i, j \in A$. Ez az $([m], \mathcal{G})$ duális hipergráfban azt jelenti, hogy tetszőleges $1 \leq i < j \leq n$ esetén $|B_i \cap B_j| = 1$. Tehát alkalmazhatjuk a Fischer egyenlőtlenséget az $([m], \mathcal{G})$ hipergráfra, ennek alapjan $n = |\mathcal{G}| \leq m$. Ezzel beláttuk az Erdős – De Bruijn tételt.

Véges projektív síkok.

Legyen p egy prímszám. Tekintsük az összes (x, y, z) számhármast, ahol $0 \leq x, y, z \leq p - 1$, és $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Két számhármas, (x, y, z) és (x', y', z') *ekvivalensek* ha valamilyen λ számra $x \equiv \lambda x' \bmod p$, $y \equiv \lambda y' \bmod p$, $z \equiv \lambda z' \bmod p$.

A *pontok* a számhármasokból képzett ekvivalencia osztályok.

Hasonlóan definiáljuk az egyeneseket is. Tekintsük az összes (a, b, c) számhármast, ahol $0 \leq a, b, c \leq p - 1$, és $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. Az *egyenesek* a számhármasokból képzett ekvivalencia osztályok.

Egy (x, y, z) pont illeszkedik az (a, b, c) egyenesre akkor és csak akkor, ha $ax + by + cz \equiv 0 \bmod p$. (Itt (x, y, z) illetve (a, b, c) a megfelelő ekvivalencia osztály tetszőleges tagja.)

Nem nehéz belátni, hogy

1. összesen $p^2 + p + 1$ pont, és ugyanennyi egyenes van,

2. minden ponton $p + 1$ egyenes megy át, és minden egyenesen $p + 1$ pont van,

3. bármely két ponton át pontosan egy egyenes van, és bármely két egyenesnek pontosan egy közös pontja (metszéspontja).

Ez a p–edrendű véges sík. Hasonló véges sík konstruálható akkor is, ha p prímhatvány.

A p–edrendű sík felfogható egy hipergráfnak is, amelynek az alaphalmaza a sík pontjai, és minden egyenesnek megfelel egy részhalmaz: annak az egyenesnek a pontjai. Ennek a hipergráfnak p^2+p+1 pontja van, ugyanennyi éle (vagyis részhalmaza), minden részhalmaz $p+1$ elemű, bármely két ponton pontosan egy részhalmaz van, és bármelyik két részhalmaz pontosan egy pontban metszi egymást. Ez a hipergráf tehát kielégíti a Fischer egyenlőtlenség feltételét, és az Erdős – De Bruijn tétel feltételét is. Így mutatja, hogy mindkét tételben a becslés éles.

$K_{2,2}$–mentes gráfok

Tétel (Erdős, Kővári, Sós, Turán, 1954) *Legyen $r \geq s \geq 2$. Egy n csúcsú gráfnak, amely nem tartalmaz $K_{r,s}$–t részgráfként legfeljebb $c_{r,s}n^{2-1/s}$ éle van, valamilyen $c_{r,s}$ konstansra.*

Bizonyítás. Most csak az $r = s = 2$ esetre bizonyítjuk be a tételt, vagyis azt, hogy $\mathrm{Ex}(K_{2,2}, n) \leq n^{3/2}$. Tegyük fel, hogy G-nek n csúcsa van, és nem tartalmaz $K_{2,2}$–t (négy hosszú kört) részgráfként. Legyenek a csúcsok fokszámai $d_1, d_2, \ldots, d_n$, e az élek száma, $\bar{d} = (d_1 + d_2 + \cdots + d_n)/n$, az átlagos fokszám, és legyen x a G-ben található 2 hosszú (két élű) utak száma. Egyrészt egy d_i fokú csúcsban pontosan $\binom{d_i}{2}$ darab 2 hosszú útnak van a középső pontja. Tehát $x = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}$. Másrészt, mivel nincs a gráfban $K_{2,2}$, bármely két csúcs legfeljebb egy útnak lehet a két vége. Tehát $x \leq \binom{n}{2}$.

Állítás: $\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2}\right)/n \geq \binom{\bar{d}}{2}$.

Ezt sokféleképpen be lehet bizonyítani, például direkt számolással, ha behelyettesítjük $\bar{d}$ helyére $(d_1 + d_2 + \cdots + d_n)/n$–t, beszorzunk, egyszerűsítünk, akkor azt kapjuk, hogy $\sum_{1 \leq i < j \leq n} (d_i - d_j)^2 \geq 0$ ez pedig nyilván igaz.

Általánosabban, az $x(x-1)/2$ függvény konvex, ezért a Jensen egyenlőtlenség miatt (vagy csak józan paraszti ésszel) néhány függvényérték átlaga legalább annyi, mint a helyek átlagában vett függvényérték.

Tudjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2e$, tehát $\bar{d} = 2e/n$. Tehát $n\binom{2e/n}{2} \leq \binom{n}{2}$, innen, felhasználva hogy $e > 2n$, (különben eleve készen vagyunk) azt kapjuk, hogy $e^2 \leq n^3$, tehát $e \leq n^{3/2}$.

A véges projektív sík arra is példa, hogy a fenti korlát nagyságrendileg pontos. Tekintsünk egy p–edrendű projektív síkot. A G páros gráf csúcsai feleljelenek meg a projektív sík pontjainak, illetve egyeneseinek. Két csúcs akkor és csak akkor van G–ben összekötve, ha az egyik pontnak, a másik egyenesnek felel meg, és az egyenes tartalmazza a pontot. Ennek a gráfnak $n = 2(p^2 + p + 1)$ csúcsa van, és nincs benne $K_{2,2}$, hiszen egy $K_{2,2}$ két pontnak felelne meg, amelyekre két egyenes illeszkedik. Mivel minden ponton $p+1$ egyenes van, tehat G éleinek a száma $(p^2 + p + 1)(p + 1) \approx p^3 \approx n^{3/2}$.