Kombinatorika és gráfelmélet I

Második Aláíráspótló ZH, 2011. dec. 15. 8.15-9.45, QBF10

A rendelkezésre álló munkaidő 90 perc. Minden résztvevő a **nevét** és **NEPTUN kódját** valamint **gyakorlatvezetője nevét** a dolgozat *minden* lapjának jobb felső sarkában *olvashatóan* és *helyesen* tüntesse fel. Minden egyes feladat helyes megoldása 10 pontot ér. A dolgozatok értékelése (tájékoztató jelleggel): 0-19 pont: 1, 20-29 pont: 2, 30-39 pont: 3, 40-49 pont: 4, 50-60 pont: 5. A puszta (indoklás nélküli) eredményközlést nem értékeljük. A megindokolt részeredményért arányos pontszám jár. Az évvégi jegy kiszámításakor a két (legalább elégséges) zh *összesített* pontszámát vesszük figyelembe. Írószeren és papírokon kívül semmilyen segédeszköz használata sem megengedett, így tilos az írott vagy nyomtatott jegyzet, a számoló- és számítógép ill. mobiltelefon használata, továbbá a dolgozatírás közbeni együttműködés.

1. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \dots, v_7$ és $u_1, u_2, \dots, u_7$. A v_i és v_j csúcsok akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i-j| \in \{1, 6\}$. Hasonlóan, az u_i és u_j csúcsok is akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i-j| \in \{1, 6\}$. Ezenkívül minden $1 \le i \le 7$–re v_i és u_i össze vannak kötve. Határozzuk meg G pont–összefüggőségi számát.

2. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő gráf kromatikus számát.

3. a. Bizonyítsuk be, hogy minden G gráfra $\chi(G) \le 2\nu(G) + 1$.
b. Minden $a \ge 1$ számra mutassunk egy olyan $G = G(a)$ gráfot amelyre $\nu(G) = a$ és $\chi(G) = 2a + 1$.

4. G egy páros gráf, A és B osztályokkal. A-ban is és B-ben is minden pont foka legalább 1. Tudjuk, hogy tetszőleges $X \subseteq A$ esetén $|N(X)| \le |X|$. ($N(X)$ az X pontjai szomszédainak a halmaza.) Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz B-t lefedő párosítást.

5. A G gráf csúcsai $v_{i,j}$, minden i, j számpárra, ahol $1 \le i \le 100$, $1 \le j \le 100$. A $v_{i,j}$ és a $v_{i',j'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha

$$|i - i'| + |j - j'| = 2.$$

Határozzuk meg G él–összefüggőségi számát.

6. Mennyi az $\alpha(G) + \nu(G)$ lehetséges legnagyobb értéke, ha G tetszőleges 100 csúcsú gráf lehet?

($\tau(G)$: lefogó pontok minimális száma, $\nu(G)$: független élek maximális száma, $\rho(G)$: lefogó élek minimális száma, $\alpha(G)$: független pontok maximális száma, $\chi(G)$: kromatikus szám)