Kombinatorika és gráfelmélet I

Második PótZH, 2011. dec. 9. 12.15-13.45, H405/A

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. A G gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{13}$, v_i és v_j akkor és csak akkor vannak összekötve, ha $|i-j| \in \{1, 2, 11, 12\}$. Határozzuk meg G pont–összefüggőségi számát.

Hagyjuk el a v_i, v_j, v_k csúcsokat a gráfból. Ha egymás mellett vannak, vagyis $j = i+1$, $k = i+2$, akkor akkor a többi csúcs összefüggő gráfot feszít, sőt, van Hamilton útja, $v_{k+1}v_{k+2}\ldots v_{i-1}$. (az indexeket modulo 13 értjük, tehát pl v_{14} v_1–et jelöli.) 2 pont

Ha kettő egymás mellett van, mondjuk $j = i+1$, és v_k máshol, akkor is ugyanez a helyzet: $v_{j+1}\ldots v_{k-1}v_{k+1}\ldots v_{i-1}$ egy Hamilton út a megmaradt pontokon. 2 pont

Végül ha semelyik kettő sem szomszédos, akkor még Hamilton kör is van a maradék pontokon: $v_{j+1}\ldots v_{k-1}v_{k+1}\ldots v_{i-1}v_{i+1}\ldots v_{j-1}$. (A lényeg, hogy az egyedül álló elhagyott pontot vagy pontokat át tudjuk ugrani egy 2 hosszú élen.) 2 pont

Ugyanakkor 4 pont elhagyásával könnyű szétszedni a gráfot, hiszen minden csúcs foka 4, bármelyiknek elhagyhatjuk a szomszédait. 3 pont

Tehát a pont–összefüggőségi szám 4. 1 pont

2. Határozzuk meg az előző feladatban szereplő gráf kromatikus számát.

Mivel a gráf tartalmaz háromszöget, $\chi(G) \geq 3$. 2 pont

Próbáljuk meg három színnel, pirossal, kékkel és zölddel kiszínezni a csúcsokat. Feltehetjük hogy v_1 piros, v_2 kék, ekkor, mivel bármelyik három egymás utani csúcs háromszöget határoz meg, a színezés egyértelmű: v_3 zöld, v_4 piros, v_5 kék, ... v_{13} piros, v_1 kék, ellentmondás, mert v_1 piros. Tehát $\chi(G) \geq 4$. 4 pont

4 színnel viszont könnyű kiszínezni, például úgy, ahogy az előbb próbáltuk, de v_{13} új színt kap, sárga. 4 pont

3. Tekintsük az összes olyan G 100 csúcsú gráfot, amelyekre $\tau(G) = 4$ és $\chi(G) = 4$. Mennyi az ilyen gráfok élszámának maximuma?

Felejtsük el egy pillanatra a $\chi(G) = 4$ feltételt. Ha 4 lefogó pont van, mondjuk a, b, c, d, és maximalizálni akarjuk az élek számát, akkor az összes élet kell vennünk, amelyek erre a négy pontra illeszkednek. 4 pont

Ebben a gráfban a, b, c, d egy teljes 4 pontú gráfot feszít, és mind a négy pont össze van kötve a többi 96 ponttal. Tehát ennek a gráfnak a kromatikus száma sajnos 5. 3 pont

Viszont ha egyetlen egy élet elveszünk, mondjuk az ab élet, akkor már 4 lesz a kromatikus szám, tehát ez egy maximális élszámú 100 csúcsú G gráf, amelyben $\tau(G) = 4$ és $\chi(G) = 4$. Az élek száma $4 \cdot 96 + 5 = 389$. 4 pont

4. G egy páros gráf, A és B osztályokkal. A-ban minden pont foka legalább 20, B-ben legfeljebb 15. Bizonyítsuk be, hogy G tartalmaz 5 éldiszjunkt, A-t lefedő párosítást.

Ellenőrizzük a Hall feltételt. 1 pont

Legyen $X \subseteq A$ tetszőleges, és E az X és $N(X)$ között futó élek halmaza. Ekkor $|E| \geq 20|X|$ mivel X-ben minden csúcs foka legalább 20. 2 pont

Viszont $|E| \leq 15|N(X)|$, mert minden $N(X)$-beli csúcs foka legfeljebb 15, és nem is biztos hogy a belőlük kifutó élek mind E-ben vannak. 2 pont

Tehát $20|X| \leq 15|N(X)|$, ebből következik hogy $|X| \leq |N(X)|$, teljesül a Hall feltétel, van A-t lefedő párosítás. 1 pont

Most hagyjuk el ezt a párosítást, ekkor A-ban minden csúcs foka legalább 19, B-ben pedig továbbra is legfeljebb 15. 1 pont

Megint ellenőrizzük a Hall feltételt, a fenti számolás így módosul: $19|X| \leq 15|N(X)|$, ebből tovabbra is következik, hogy $|X| \leq |N(X)|$, tehát még mindig van A-t lefedő párosítás. 2 pont

Ezt megismételhetjük 4-szer. A k-adik párosítás elhagyása után ($k \leq 4$) a számolás: $(20-k)|X| \leq 15|N(X)|$, ebből következik, hogy $|X| \leq |N(X)|$, tehát még mindig van egy $k+1$-edik A-t lefedő párosítás. 1 pont

(Igazából $k = 5$-re is működik a számolás, tehát 6 párosítás is van.)

5. A G gráf csúcsai $v_{i,j,k}$, minden i, j, k számhármasra, ahol $1 \leq i \leq 4$, $1 \leq j \leq 4$, $1 \leq k \leq 4$. A $v_{i,j,k}$ és a $v_{i',j',k'}$ csúcsok pontosan akkor vannak összekötve, ha

$$|i-i'| + |j-j'| + |k-k'| = 1.$$

Határozzuk meg G él–összefüggőségi számát.

A gráf tulajdonképpen egy kockarács $4 \times 4 \times 4$–es része. Mivel a sarkoknak (például $v_{1,1,1}$) a foka 3, ezért ezek elválaszthatók a gráftól 3 él elhagyásával. Tehát az él–összefüggőségi szám legfeljebb 3. 4 pont

Viszont bármely két pont között vezet 3 éldiszjunkt út. (Például ha $i < i'$, $j < j'$, $k < k'$, akkor mehetünk $v_{i,j,k}$–ból jobbra-hátra-fel, vagy hátra-fel-jobbra, fel-jobbra-hátra. A többi eset is nagyon hasonló.) Ezért az él–összefüggőségi szám pontosan 3. 5 pont

6. G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{90}$, v_i és v_j pontosan akkor vannak összekötve, ha $|i-j|+1$ osztható 10–zel. Határozzuk meg a $\tau(G)$, $\nu(G)$, $\rho(G)$, és $\alpha(G)$ értékeket.

A feltételek alapján ha $|i-j| = 9$, akkor v_i és v_j össze vannak kötve. Tehát kaphatunk egy teljes párosítást a következő módon. $v_1v_{10}, v_2v_{11}, \ldots v_9v_{18}$ egy teljes párosítás az első 18 csúcson. Ezt négyszer megismételve egy teljes párosítást kapunk a 90 csúcson. 4 pont

Ez 45 független él, több nem lehet, tehát $\nu(G) = 45$. 1 pont

A Gallai tétel szerint $\nu + \rho = 90$, tehát $\rho(G) = 45$. 1 pont

Ha v_i és v_j össze vannak kötve, akkor $|i-j|+1$ osztható 10–zel, vagyis $|i-j|$ páratlan. Ezért minden v_iv_j élre i és j közül az egyik páros, a másik páratlan. Vagyis G páros gráf, a két osztály a páros és a páratlan indexű csúcsok halmaza. Nyilván nincs izolált pont. 2 pont

Ezért alkalmazhatjuk a Kőnig tételeket (páros gráfban $\nu = \tau$ és $\alpha = \rho$), ezek alapján $\alpha(G) = 45$ és $\tau(G) = 45$. 2 pont