Kombinatorika és gráfelmélet I

Első PótZH, 2011. dec. 9. 12.15-13.45, H405/A

Javítókulcs

Az útmutató mintamegoldásokat tartalmaz. A pontszámokat tájékoztató jelleggel állapítottuk meg, az értékelés egységesítése céljából. Egy pontszám előtt szereplő állítás kimondása, tétel felidézése nem jelenti automatikusan az adott pontszám megszerzését. Az adott részpontszám megítélésének az a feltétele, hogy a megoldáshoz vezető gondolatmenet megfelelő részének végiggondolása világosan kiderüljön a dolgozatból. Ha ez utóbbi kiderül, ám a kérdéses állítás, tétel, definíció nincs rendesen kimondva, akkor a részpontszám legalább részben jár. Természetesen az ismertetettektől eltérő, ám helyes megoldásokért teljes pontszámok, részmegoldásokért pedig az útmutatóbeli pontozás intelligens közelítésével meghatározott arányos részpontszámok járnak. Számolási hibáért általában (hibánként) 1 pontot vonunk le.

1. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_8$ csúcsokon, amelynek minden fokszáma páratlan?

Elég a fák Prüfer kódját nézni, mert ezek egyértelműen megfelelnek a fáknak. Tudjuk, hogy az $n-2$, vagyis 6 hosszú Prüfer kódban minden csúcs sorszáma eggyel kevesebbszer szerepel, mint a fokszáma. Tehát ebben az esetben a minden csúcs *páros* sokszor szerepel. 1 pont

Ennek alapján a következő lehetőségek vannak. 1. Egy csúcs sorszáma szerepel hatszor vagyis egy hetedfokú, és hét elsőfokú csúcs van. Ilyen Prüfer kód 8 darab van. 1 pont

2. Egy csúcs sorszáma szerepel négyszer, és egy kétszer, vagyis egy ötödfokú, egy harmadfokú, és hat elsőfokú csúcs van. Ekkor ki kell választani, hogy melyik csúcs lesz az ötödfokú (8 lehetőség), melyik lesz a harmadfokú (7 lehetőség), és melyik négy helyen legyen a Prüfer kódban az ötödfokú csúcs sorszáma ($\binom{6}{4}$ lehetőség). 3 pont

3. Három csúcs sorszáma szerepel kétszer, vagyis három harmadfokú és öt elsőfokú csúcs van. Itt ki kell választanunk a három harmadfokú csúcsot ($\binom{8}{3}$ lehetőség), ezek soszámaiból $\frac{6!}{2^3}$–féleképpen készíthetünk egy 6 hosszú sorozatot, amelyben mindegyikből kettő szerepel. 4 pont

Tehát az összes lehetőség száma

$$8 + 8 \cdot 7 \cdot \binom{8}{3} + \binom{8}{3} \frac{6!}{2^3}.$$

1 pont

2. Legyen G 12 csúcsú gráf, négy darab diszjunkt háromszög uniója. Legkevesebb hány élet kell hozzávenni G-hez, hogy a kapott gráfban legyen Euler kör?

Egy gráfban akkor és csak akkor van Euler kör, ha összefüggő, és minden fokszám páros. Itt minden fokszám páros, viszont G nem összefüggő. 1 pont

Ahhoz, hogy G–t összefüggővé tegyük, minden háromszögből ki kell indulnia legalább egy új élnek. Viszont ha csak egy új él indulna ki valamelyik háromszögből, akkor ott valamelyik csúcs foka 3 lenne, ami páratlan. Ezért minden háromszögből legalább két új élnek kell kiindulni. Tehát legalább $(4 \cdot 2)/2 = 4$ új él kell. 5 pont

Ennyi viszont elég is. Mindegyik háromszögnek vegyük egy–egy pontját, és ezen a négy ponton vegyünk fel egy 4 hosszú kört. Ez a gráf teljesíti a feltételeket, van Euler köre. 4 pont

3. A K_n n csúcsú teljes gráf ($n > 3$) éleit úgy súlyoztuk meg, hogy az n^{n-2} darab feszítőfája közül legalább $n^{n-2} - 1$ darab minimális összsúlyú feszítőfa. Bizonyítsuk be, hogy minden él súlya ugyanannyi.

Legyenek a csúcsok $v_1, v_2, \ldots, v_n$, $s(v_iv_j)$ a v_iv_j él súlya.

Először belátjuk, hogy a közös végpontú éleknek azonos a súlya. Tegyük fel, hogy mondjuk $s(v_1v_2) > s(v_1v_3)$. Legyen F_1 és F_2 két feszítőfa a $v_2, v_3, \ldots, v_n$ csúcsokon. (Ennyi biztos van, mert $n > 3$.) Ekkor az $F_i + v_1v_2$ illetve az $F_i + v_1v_3$ ($i = 1, 2$) mind $v_1, v_2, \ldots, v_n$ feszítőfái. 3 pont

Ha $s(F_1) = s(F_2)$, akkor $s(F_i + v_1v_2) > s(F_i + v_1v_3)$ vagyis van két nagy, és két kis összsúlyú feszítőfa. Ez lehetetlen, mert egy kivétellel minden feszítőfa minimális összsúlyú. 2 pont

Ha pedig mondjuk $s(F_1) > s(F_2)$, akkor $s(F_1 + v_1v_2) > s(F_1 + v_1v_3) > s(F_2 + v_1v_3)$, megint lehetetlen, nincs három különböző súlyú fa. 2 pont

Most legyen v_iv_j és v_kv_l két tetszőleges független él. A fentiek alapján $s(v_iv_j) = s(v_iv_l) = s(v_kv_l)$. Tehát minden él súlya egyforma. 3 pont

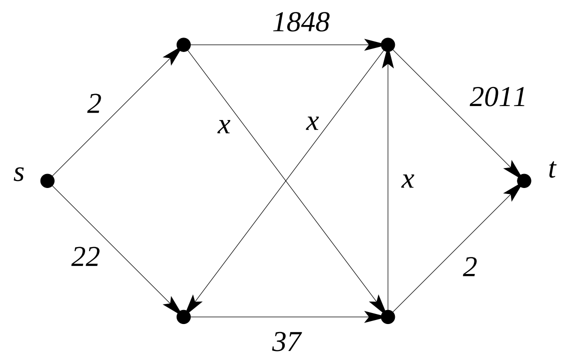
4. Legyenek G csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_n$, minden mindennel össze van kötve, kivéve v_1 és v_2. Hány kölönböző Hamilton köre van G–nek?

Húzzuk be a v_1v_2 élet is. Összesen így $(n-1)!/2$ Hamilton kör van. (A v_1 csúcs után $(n-1)!$ sorrendben következhet a körön a többi csúcs, de így minden kört kétszer számoltunk, a két körüljárással.) 4 pont

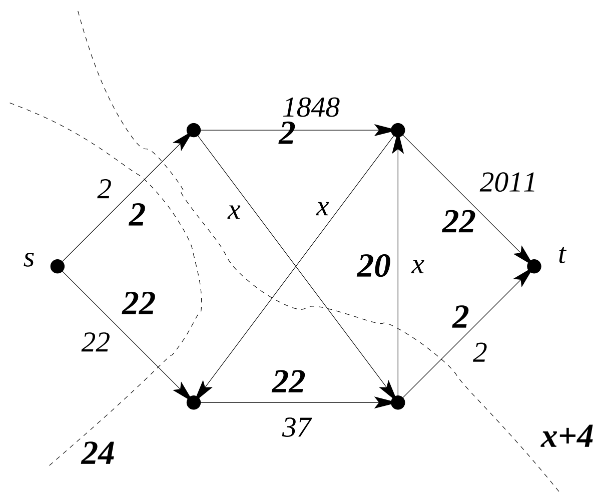
Az olyan Hamilton körök száma, amelyek tartalmazzák a v_1v_2 élet, $(n-2)!$. (A v_1v_2 él után $(n-2)!$ sorrendben következhet a körön a többi csúcs, és így minden kört pontosan egyszer számoltunk.) 4 pont

Tehát a válasz $(n-1)!/2 - (n-2)!$. 2 pont

5. Határozzuk meg az összes olyan x számot, amelyre az alábbi hálózatban a maximális folyam értéke 24.



1. ábra. A feladat



2. ábra. A megoldás

Mivel van egy $4 + x$ értékű vágás (lásd az ábrát) ezért ha $x < 20$, akkor nincs 24 értékű folyam. 3 pont

Ha $x \geq 20$, akkor van 24 értékű folyam (ábra). 3 pont

Több meg akkor sincs, mert van egy 24 értékű vágás is (lásd az ábrát). 3 pont
Tehát a válasz $x \geq 20$. 1 pont

6. A G teljes gráf csúcsai $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$, és $u_1, u_2, \ldots, u_{40}$. A $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$ csúcsok közötti élek súlya 1, az $u_1, u_2, \ldots, u_{40}$ csúcsok közötti élek súlya 2, és az u_iv_j élek súlya 3. Hány minimális összsúlyú feszítőfája van G–nek?

Mivel 80 csúcsunk van, a minimális feszítőfáknak 79 éle van. 1 pont
Ebből legfeljebb 39 lehet 1 súlyú, mert különben kört alkotnának a $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$ csúcsokon. 2 pont
Ugyancsak legfeljebb 39 lehet 2 súlyú, mert különben kört alkotnának az $u_1, u_2, \ldots, u_{40}$ csúcsokon. (Vagy: legalább egy él 3 súlyú kell hogy legyen, különben nem lenne összefüggő a keresett feszítőfa.) 2 pont
Tehát a minimális összsúlyú feszítőfák súlya $39 \cdot 1 + 39 \cdot 2 + 3$. Ilyeneket úgy kaphatunk, hogy veszünk egy tetszőleges feszítőfát a $v_1, v_2, \ldots, v_{40}$ csúcsokon (40^{38} lehetőség), egy tetszőleges feszítőfát az $u_1, u_2, \ldots, u_{40}$ csúcsokon (40^{38} lehetőség), és egy tetszőleges 3 súlyú éllel összekötjük őket (40^2 lehetőség). 4 pont
Tehát összesen 40^{78} minimális összsúlyú feszítőfa van. 1 pont