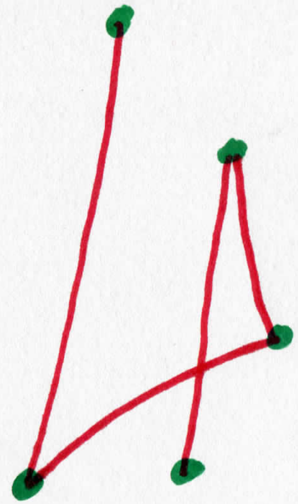
Gráfok, fák, Prüfer kód



G(V, E) gráf: V: csúcsok halmaza
(irányítatlan) E: rendezetlen csúcs-párok (élek)

Gráf ábrázolása (lerajzolása):
csúcsok: pontok, élek: csúcsokat (pontokat) összekötő görbék.

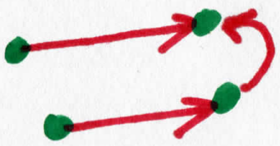
A, B össze van kötve (szomszédos) $\Longleftrightarrow$ $(A, B) \in E$

hurokél

párhuzamos (többszörös) élek

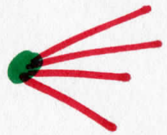
Egyszerű gráf: nincs hurokél, párhuzamos él.

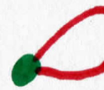
Ha E (élek halmaza) <u>rendezett</u> párokból áll: irányított gráf.



kezdőpont $\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet$ végpont

fokszám: <u>irányítatlan</u> gráfra $d(v)$: illeszkedő élek száma

v  $d(v)=4$

 $d(v)=2$

irányított gráfra: $d_{ki}(v)$: kiinduló élek
$d_{be}(v)$: végződő élek
száma

Mostantól: egyszerű irányítatlan gráfokkal foglalkozunk.

n csúcsú teljes gráf: n csúcs, minden mindennel össze van kötve (egyszer) $\Rightarrow$ $\binom{n}{2}$ él.

K_n

G gráf, n csúcs e él, fokszámok $d_1, d_2 \dots d_n$.

Ekkor $d_1+d_2+\dots d_n = 2e$

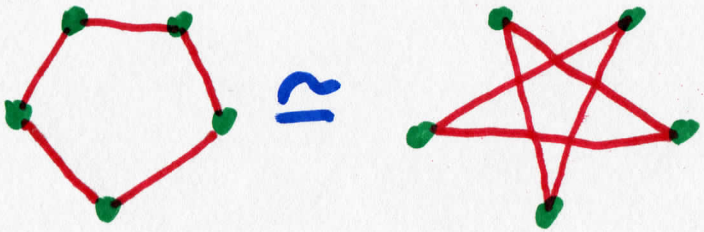
Biz: $d_1+\dots d_n$ minden élt pontosan kétszer számol, mindkét vége felől egyszer.

$G(V,E) \simeq G'(V',E')$ <u>izomorfak</u>: van

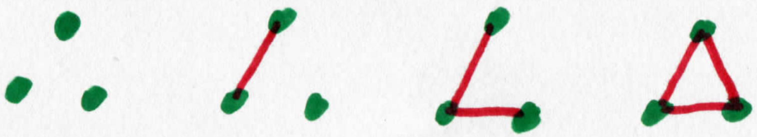
$$V \longleftrightarrow V'$$
$$E \longleftrightarrow E'$$

illeszkedéstartó bijekció.

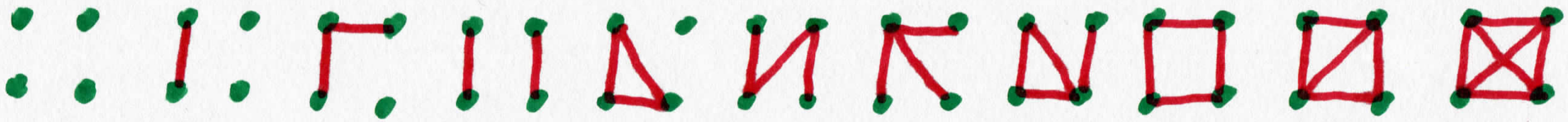
v illeszkedik e-re $\Longleftrightarrow$ v' illeszkedik e'-re.



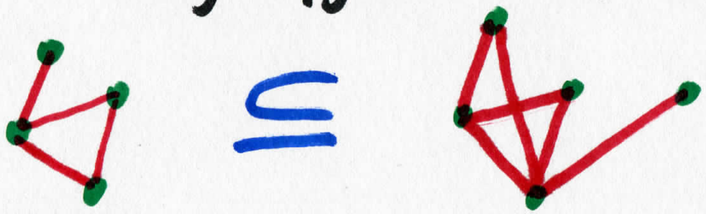
3 csúcsú nem izomorf gráfok:



4 csúcsú nem izomorf gráfok:

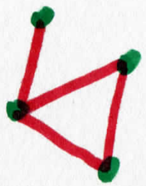
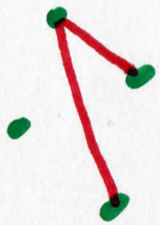


$G' \subseteq G$ G' részgráfja G-nek, ha $V' \subseteq V$ és $E' \subseteq E$



Komplementer gráf $\bar{G}$: ugyanazok a csúcsok,

uv szomszédos $\bar{G}$-ben $\Longleftrightarrow$ uv nem szomszédos G-ben

$G =$  $\bar{G} =$ 

Élsorozat: $v_1 v_2 \dots v_k$ csúcsok, $\forall i$ $v_i v_{i+1}$ össze van kötve

zárt élsorozat: $v_1 = v_k$

Séta: élsorozat, de nincs él ismétlődés

zárt séta: $v_1 = v_k$

Út: élsorozat, de nincs csúcs ismétlődés.

zárt út: kör $v_1 = v_k$

G gráf, u, v csúcsok. Van $u - v$ élsorozat $\Leftrightarrow$ van $u - v$ séta $\Leftrightarrow$ van $u - v$ út.

Biz: $\Leftarrow$ triviális: minden út séta és minden séta élsorozat.

$\Rightarrow$: Tegyük fel, hogy van $u - v$ élsorozat. Vegyük a legrövidebbet! Ezen nem lehet csúcs ismétlődés mert akkor rövidíthetnénk. $\rightarrow$ Van $u - v$ út is. KÉSZ

G <u>összefüggő</u>: bármely 2 csúcs között van út (séta, élsorozat)

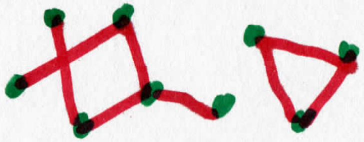
G tetszőleges, u, v csúcsok. $u \sim v$: van $u-v$ út.

$\sim$ reflexív, szimmetrikus, tranzitív

$u \sim u$ $\quad$ $u \sim v \Leftrightarrow v \sim u$ $\quad$ $u \sim v, v \sim w \Rightarrow u \sim w$

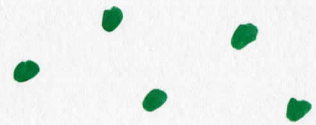
$\rightarrow$ $\sim$ ekvivalencia reláció, ekvivalencia osztályok:

összefüggő komponensek

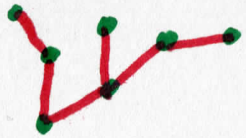


G összefüggő $\Leftrightarrow$ egy összefüggő komponensből áll

G körmentes : nincs benne kör

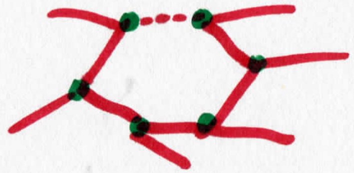


Fa def: G körmentes és összefüggő : FA



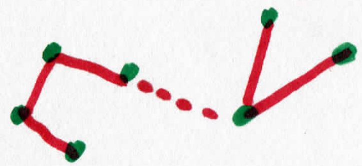
G összefüggő és tartalmaz kört : elhagyható egy éle úgy hogy öf. marad.

Biz: hagyjunk el egy kör egy élét.



G nem összefüggő és körmentes: hozzá tudunk venni egy élt úgy, hogy körmentes marad.

Biz: húzzunk be egy élt két komponens közé

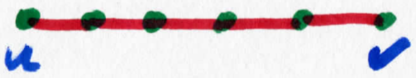


$\Rightarrow$ Egy összefüggő gráf mindig tartalmaz fát.

$\Rightarrow$ Egy körmentes gráf kiegészíthető fává.

Minden fában van legalább 2 1-fokú pont.

Biz: P a leghosszabb út a fában, végei u, v. Ekkor u, v 1-fokú. (levél)

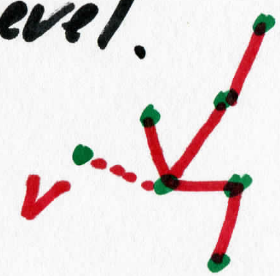


(nem lehet más szomszédjuk: P-beli szomszéd: kör, P-n kívüli: hosszabb út)

F n csúcsú fa $\Rightarrow$ n-1 éle van.

Biz: indukció n-re. n=1: ✓ F n csúcsú fa, v levél.

F\v : n-1 csúcsú fa, n-2 él $\rightarrow$ F : n-1 él



összefüggő + körmentes $\rightarrow$ FA (def) $\rightarrow$ n-1 él

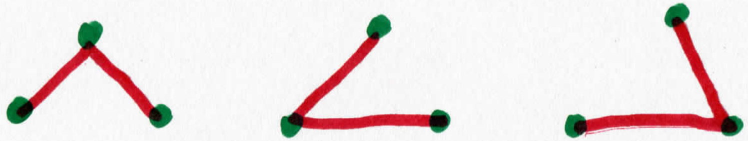
összefüggő + n-1 él $\rightarrow$ FA (tartalmaz fát, de n-1 él : ő maga a fa)

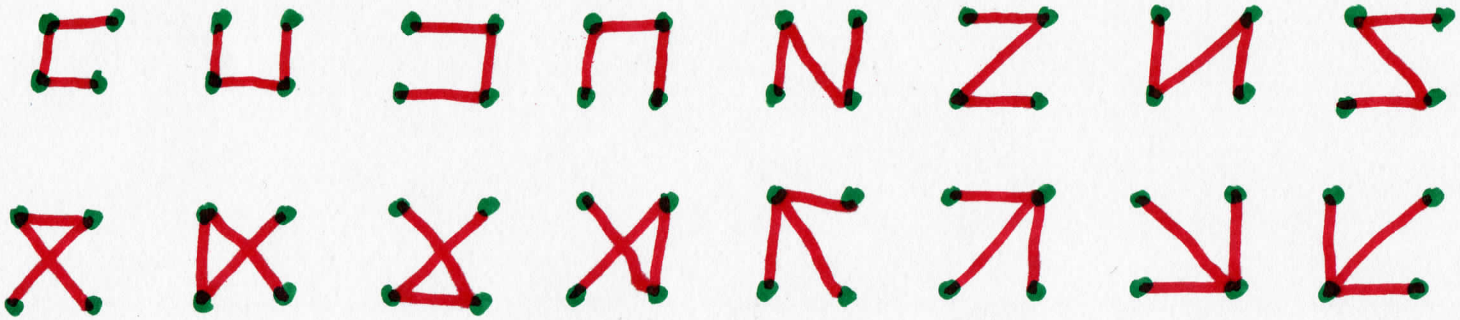
körmentes + n-1 él $\rightarrow$ FA (kiegészíthető fává, de n-1 él: ő maga fa)

Cayley tétel: n <u>számozott</u> ponton n^{n-2} különböző fa van.

számozott pont: megkülönböztetjük őket.

$n=2$:  $2^0=1$

$n=3$  $3^1=3$

$n=4$  $4^2=16$

n csúcs : n^{n-2} fa. Biz: csúcsok: 1, 2 ⋯ n.

Fa 1,2 ⋯ n -en $\longleftrightarrow$ Prüfer kód:

n-2 hosszú sorozat, tagok

1,2 ⋯ n -ből.

Ez elég: n-2 hosszú sorozat, minden tag 1,2 ⋯ n -ből:

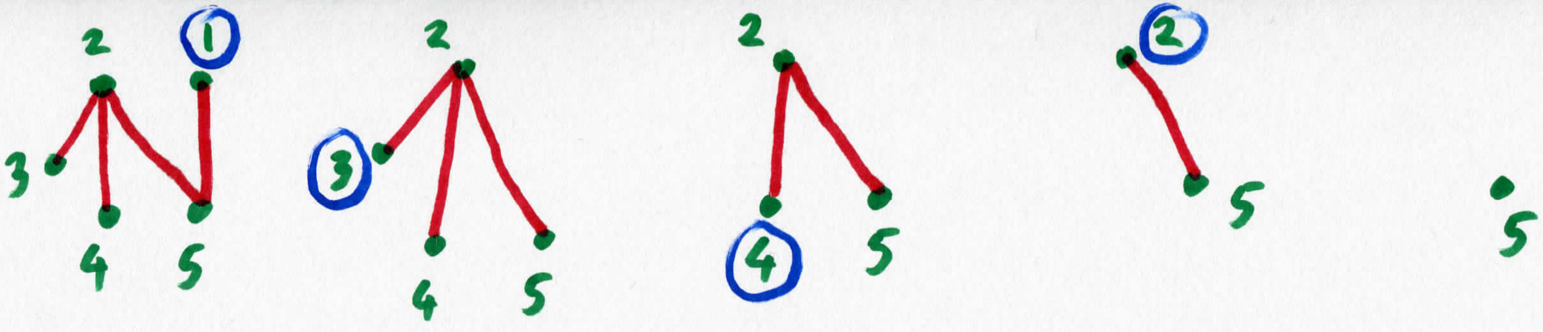
n^{n-2} db kód $\longrightarrow$ n^{n-2} db fa.

Először fa $\rightarrow$ kód:

Hagyjuk el a legkisebb sorszámú levelet w_1 írjuk le a szomszédját v_1

$\rightarrow$ eggyel kisebb fa, ismételjük meg

n-1 szer: $\underbrace{v_1 \, v_2 \cdots v_{n-1}}_{\text{bővített Prüfer Kód}}$



5 2 2 5

Végére ($n-1$ lépés után) élek elfogynak, egy csúcs marad, az $\underline{\underline{n}}$. Őt sose hagyjuk el, n nem lehet a legkisebb sorszámú levél. (Mindig legalább 2 levél van)

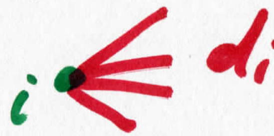
Ezért $n-2$ lépés után: i — n utoljára i-t hagyjuk el, szomszédja: n.

$\Longrightarrow v_{n-1} = n$ minden fára!

Prüfer kód: $v_1 \, v_2 \cdots v_{n-2}$

bővített: $v_1 \, v_2 \cdots v_{n-2}$ $\boxed{v_{n-1}=n}$

Prüfer kód: minden i $d_i - 1$ -szer szerepel.



Biz: bővített Prüfer kód:

ha $i < n$: elhagyjuk $d_i - 1$ szomszédját, (felírjuk i-t)
majd i-t hagyjuk el.

$i = n$: elhagyjuk az összes szomszédját. (felírjuk i-t)

de $v_{n-1} = n$-et elhagyjuk:

Prüfer kódban $d_i - 1$ -szer szerepel.

F fa $\to$ Prüfer kód. F levelei: amik nem szerepelnek a kódban.

Legkisebb sorszámú levél: legkisebb hiányzó szám. w_1

$$\overbrace{v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_{n-2}}^{\text{Prüfer}} \quad n$$

$$w_1 \quad w_2 \quad \cdots \quad w_{n-2} \quad w_{n-1}$$ $\leftarrow$ elhagyott levelek.

Prüfer kód → fa. Adott $v_1 \cdots v_{n-2}$ kell: $w_1 \cdots w_{n-1}$ (elhagyott csúcsok)

bővített Prüfer: $v_1 v_2 \cdots v_{n-2}\ n$

w_1: legkisebb, ami nem szerepel $v_1 v_2 \cdots n$ -ben.

w_2: legkisebb, ami nem szerepel $w_1 v_2 \cdots n$ -ben.

w_i: $w_1 \cdots w_{i-1} v_i \cdots n$ -ben

$v_1 \quad v_2 \cdots \quad v_{i-1} \quad \cancel{v_i \cdots n}$

$\cancel{w_1 \quad w_2 \quad w_{i-1}} \quad \square$

w_{n-1}: $w_1 \cdots w_{n-2}\ n$ -ben.

Kapott fa élei: $v_1 w_1 \quad v_2 w_2 \cdots v_{n-1} w_{n-1} \rightarrow n-1$ él.

Kell: $\exists$ fa és Prüfer kódja $v_1 \cdots v_{n-2}$

Minden i-re: w_i különbözik $w_1 \dots w_{i-1}$-től és n-től.

→ $w_1 \dots w_{n-1}$ n : mind különbözőek!

Áll: $\mathcal{F}$-ben nincs kör. Biz: Tfh C kör, élei:

$$\begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & \dots & v_i & \dots & n \\ w_1 & w_2 & \dots & w_i & \dots & w_{n-1} \end{array}$$

$v_i w_i$: „első" él (min. i)

De: w_i később nem szerepel se alul, se felül! Nem alkothatnak kört.

⇒ $\mathcal{F}$ fa!

Áll: w_1 : a legkisebb 1-fokú csúcs. w_1 : később nem szerepel.

→ $d(w_1)=1$. Ha $x < w_1$, $d(x)=1$: $x = w_j$.

De akkor fent nem szerepel. Vagyis: w_1 <u>nem</u> a legkisebb ami fent nem szerepel. ↯ Hasonlóan

$\mathcal{F} \setminus w_1$: w_2 a legkisebb 1 fokú csúcs...

→ $\mathcal{F}$ Prüfer kódja éppen $v_1 v_2 \dots v_{n-2}$.

KÉSZ