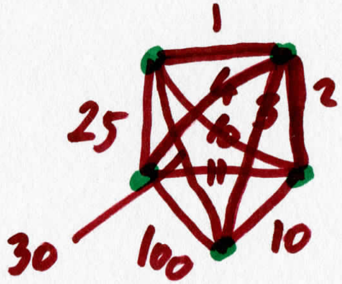
Kruskal tétel, min. feszítőfa, Euler kör/út

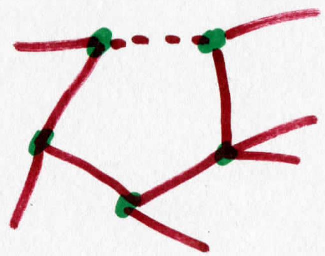
n város, bármely kettő közt út megépítése: adott (pozitív) költség. Találjuk meg a legolcsóbb összefüggő úthálózatot!



Feladat: n csúcsú teljes gráf, minden élen $s(e)>0$ súly. Találjuk meg a legolcsóbb (legkisebb összsúlyú) összefüggő részgráfot! $\to F$

F nyilván összefüggő. Ha van kör: legalább egy él fölösleges
$\to$ <u>F feszítőfa!</u>

n^{n-2} db feszítőfa van, végignézhetjük őket.



Jobb módszer: MOHÓ ALGORITMUS (Kruskal)

Mohó algoritmus min összsúlyú feszítőfa megtalálására:

Rakjuk sorba az éleket súly szerint: $s(e_1) \le s(e_2) \le \dots \le s(e_m)$.

Élenként építjük fel F-et: $i = 1, 2 \dots m$-re:

- <u>e_i-t vegyük be, ha az eddig bevettekkel nem alkot kört.</u>

Vagy: mindig vegyük be a legkisebb súlyú, az eddigiekkel kört nem alkotó élt.

<u>Eredmény:</u> $F_{mohó}$ nyilván nincs benne kör. Ha nem lenne összefüggő: két komponens közti valamelyik élt bevettük volna.

$\to F_{mohó}$ fa.

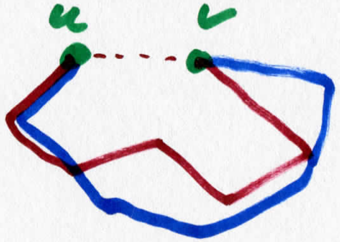
Állítás: $F_{mohó}$ = min feszítőfa.

2 észrevétel: 1. Fa + él → pontosan egy kör.

Biz: F fa, uv nem éle. → pontosan 1 uv utat tartalmaz.

(Ha kettő lenne, lenne F-ben kör)

F + uv él → uv út + uv él: pontosan 1 kör

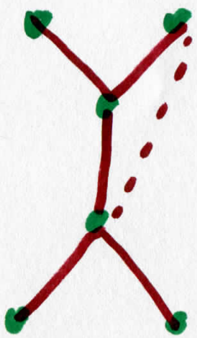


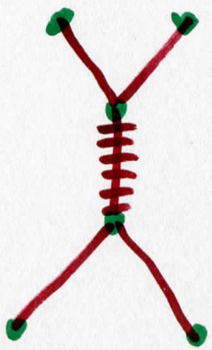
2. Fa − él → pontosan 2 komponens.

F − uv él: u-ból nem lehet eljutni v-be : legalább 2 komponens

de mindenhova el lehet jutni vagy u-ból, vagy v-ből.

→ pontosan 2 komponens

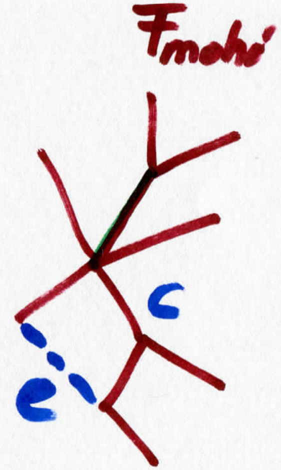




Kruskal biz: Tfh $F_{mohó}$ nem a min. feszítőfa.

F_0 : min feszítőfa, amelyre $|F_{mohó} \cap F_0|$ maximális.

$F_0 \neq F_{mohó}$ $\quad s(F_0) < s(F_{mohó})$

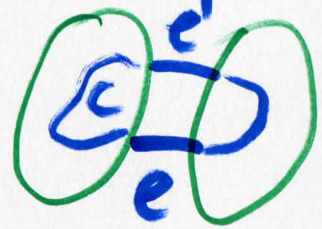


e él: $e \in F_0$, $e \notin F_{mohó}$. $\quad e + F_{mohó}$: C kör.

$\forall e' \in C,\ e' \neq e$: $s(e') \leq s(e)$

Biz: amikor e sorra került, C többi élét már bevettük, különben e-t bevettük volna.

$F_0 - e$: két komponens : C-nek van (e-től különböző) éle a két komponens közt, e'.



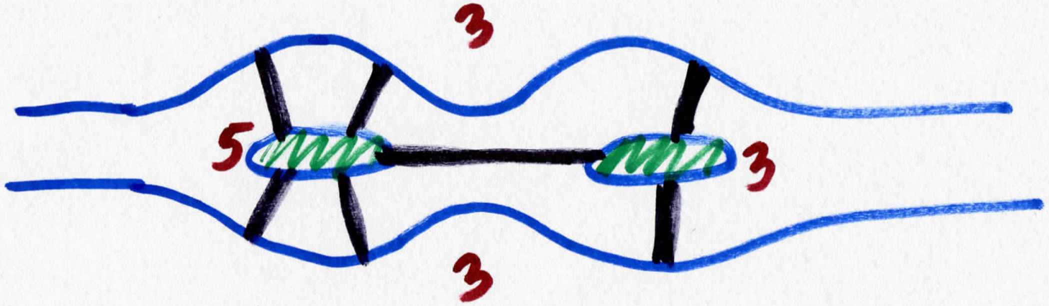
Ha $s(e') < s(e)$: $F_0 - e + e'$ fa, és kisebb súlyú ↯

$s(e') = s(e)$: $F_0 - e + e'$ fa, ugyanannyi a súlya,

de $|F_0 - e + e' \cap F_{mohó}| < |F_0 \cap F_{mohó}|$ ↯

KÉSZ!

Euler körök, utak



Königsberg - Kaliningrád

Euler 1736:
Be lehet járni az összes hidat pontosan egyszer?

NEM

mindkét partra/szigetre páratlan sok híd vezet

G gráf (nem feltétlenül egyszerű).
Euler út (séta): séta, amely minden élt (pontosan egyszer) tartalmaz.
Euler kör (körséta): körséta, amely ...

T: G-ben van Euler kör (út) $\Leftrightarrow$ izolált pontoktól eltekintve összefüggő és minden fok páros (kivéve legfeljebb kettőt)

Biz körre: $\Rightarrow$ trivi: nyilván iz. kivételével öf.

mindenpontba ugyanannyiszor be és ki : $\forall$ fok páros.

$\Leftarrow$ ha minden fok 0 : ✓. Ha nem: $d(u)>0$.

Induljunk el u-ból. Sehol nem akadhatunk el:

$\forall$ fok páros, ha be tudtunk menni, ki is tudunk menni:

Csak u-ban akadhatunk el: G-ben van körséta!

S: max (élből álló) körséta.

Ha S Euler kör: kész.

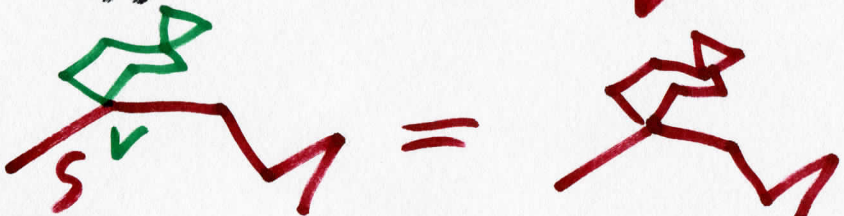
~~Ha~~ Tfh nem. valami hiányzik.

Hagyjuk el S éleit: továbbra is $\forall$ fok páros.

Van v csúcs: van S-beli és nem S-beli éle is.

Maradékban van v-ből körséta: hozzátehetjük S-hez

nagyobb körséta ↯ $\Rightarrow$ S Euler körséta volt!



Biz útra: $\Rightarrow$ trivi (ugyanaz)

$\Leftarrow$: ha minden fok páros: Euler kör is van ✓

1 páratlan fokú nem lehet ($\sum d_i = 2e$)

2 páratlan fokú, u, v: adjuk hozzá az uv élt.

$G+uv$: Euler kör. $\Rightarrow$ G: Euler út.

(uv elvesz)