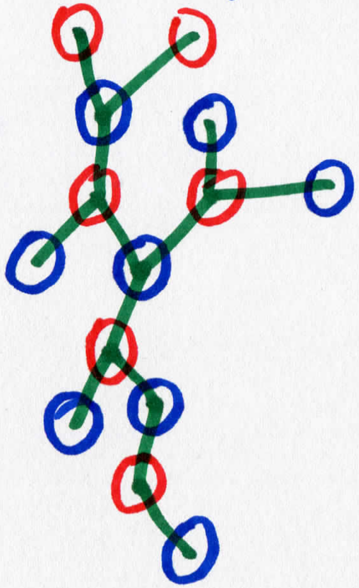
Párosítások, páros gráfok, König, Hall, Frobenius

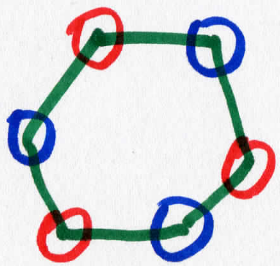
G páros gráf: csúcsok két osztályra oszthatók úgy, hogy minden él a két osztály között fut.

Jelölés: $G(A,B,E)$ A,B: az osztályok E: élek.

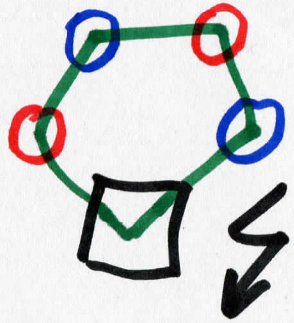
Pl. fák páros gráfok:



Páros hosszú körök is:

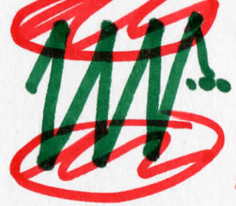


Páratlan körök nem:



G páros gráf $\Longleftrightarrow$ nem tartalmaz páratlan hosszú kört.

$\Longrightarrow$: páros gráf nem tartalmazhat páratlan kört: kör mentén felváltva van a két osztály



$\Longleftarrow$: Tfh nincs páratlan kör. Csúcsok: $\nearrow$ A, $\searrow$ B

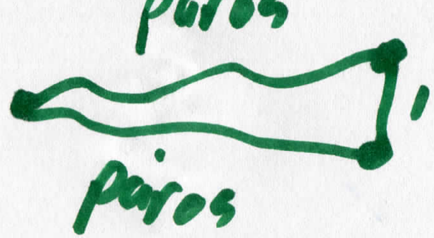
Elég összefüggő gráfra (csináljuk komponensenként)

v: valamelyik csúcs. $v \rightarrow A$ v szomszédai $\rightarrow B$

szomszédok szomszédai $\rightarrow A$ ezek szomszédai $\rightarrow B$ ....

minden be lesz osztva (összefüggő). Ha lenne A–A (vagy B–B) él:

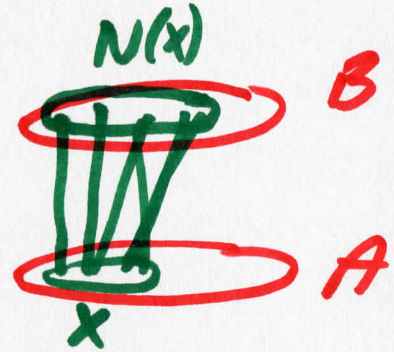
$\Longrightarrow$ páratlan kör!



Élek egy halmaza **független** vagy **párosítás** ha nincs közös végpontjuk.

Teljes párosítás: minden pont valamelyik él végpontja

Független élek maximális száma: $\nu(G)$ (nű)



Legyen $G(A,B,E)$ páros gráf, $X \subseteq A$.

$N(X)$: X pontjainak a szomszédai. $N(X) \subseteq B$

Frobenius: $G(A,B,E)$ páros gráfban van teljes párosítás

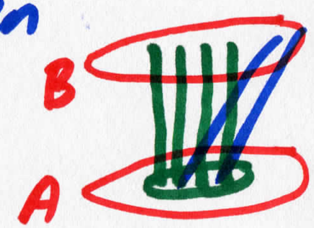
$\Longleftrightarrow$ $|A| = |B|$ és minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$

Hall: $G(A,B,E)$-ben van A-t lefedő párosítás

$\Longleftrightarrow$ minden $X \subseteq A$-ra $|N(X)| \geq |X|$

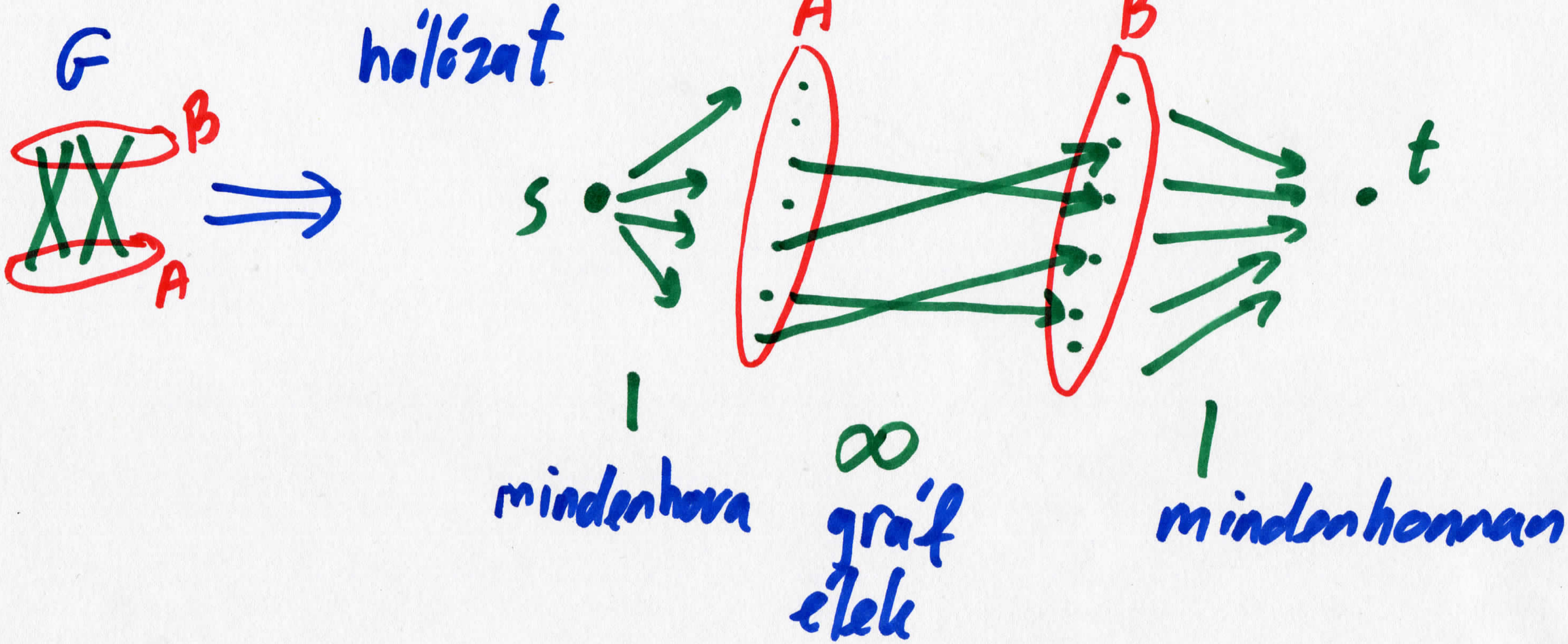
Hall: van A-t lefedő párosítás $\iff \forall\, X \subseteq A: |N(X)| \geq |X|$

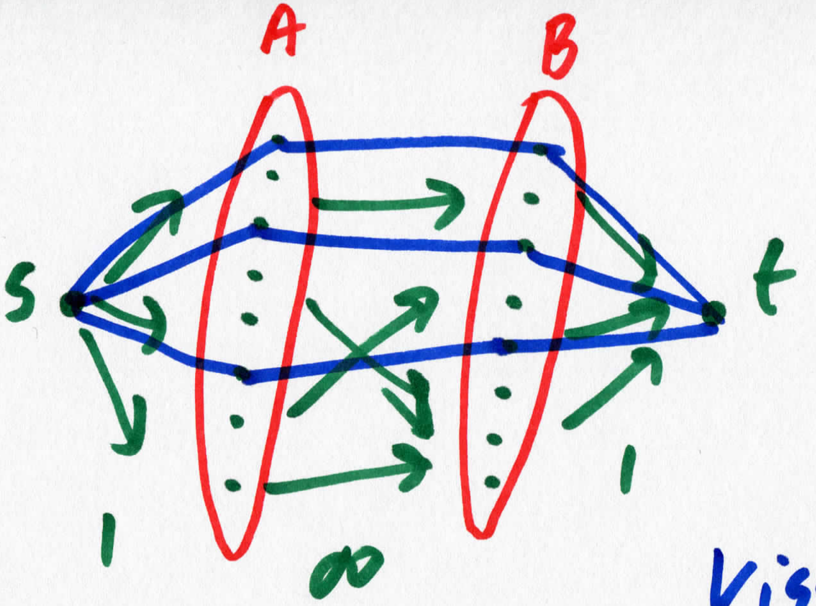
$\Longrightarrow$ könnyű: ha van A-t lefedő párosítás, minden $x \in X$-nek van párja $N(X)$-ben.



$\Longleftarrow$ folyammal

Tfh $\forall X \subseteq A: |N(X)| \geq |X|$ de nincs A-t lefedő párosítás. Ekkor $\nu(G) < |A|$





Max folyam = k. EGÉR lemma: megvalósítható egész folyammal. Itt: ez egy 0/1 folyam! Sőt: k db s-A-B-t út!

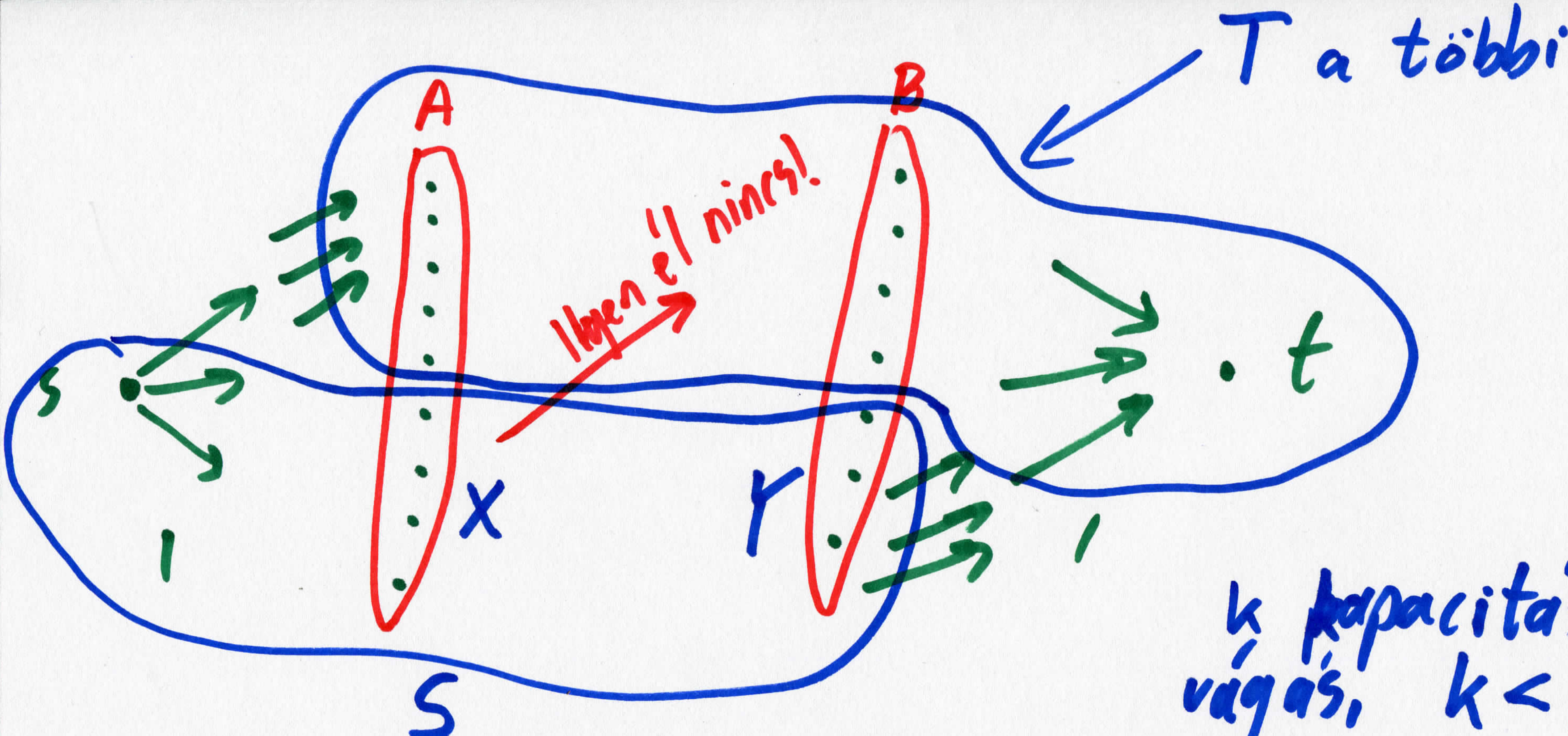
Vissza: ν független él G-ben → ν db s-A-B-t út → ν nagyságú folyam.

max folyam $\Longleftrightarrow$ max független élek

k = ν

Tehát $k = \nu < |A|$.

Ford-Fulkerson: van k kapacitású vágás! →



k kapacitású vágás, $k < |A|$

$c(S,T) = |A-X| + |Y| < |A| \Longrightarrow \underline{|Y| < |X|}$ de

$\underline{N(X) \subseteq Y}$ (nincs $X \to B-Y$ él, ∞ lenne a $c(S,T)$)

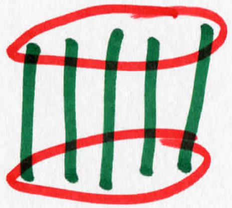
$\Longrightarrow \quad |X| > |N(X)|$ ellentmondás!

Tehát ha $\forall X: |X| \le |N(X)| \Longrightarrow$ van A-t fedő párosítás.

Hall: ✓

Frobenius: Van teljes párosítás $\Longleftrightarrow$ $|A|=|B|$ és $\forall X: |N(X)| \geq |X|$.

Triviális Hallból:



$\Longrightarrow$ Van telj. pár.: nyilván $|A|=|B|$

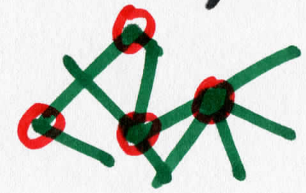
Hall: $\forall X: |N(X)| \geq |X|$

$\Longleftarrow$ $\forall X: |N(X)| \geq |X| \Longrightarrow$ (Hall) van A-t fedő párosítás

de mivel $|A|=|B|$: ez teljes párosítás.

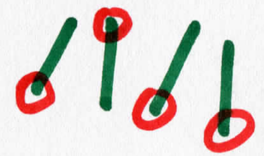
Független élek maximális száma: $\nu(G)$.

Pontok halmaza lefogó ha minden élnek valamelyik végpontja benne van.

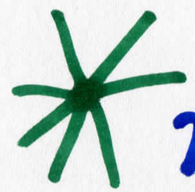


Lefogó pontok minimális száma: $\tau(G)$ (tau)

Minden gráfra $\nu(G) \le \tau(G)$: van $\nu(G)$ db független él, ezek lefogásához is kell $\nu(G)$ pont.



$\nu = 1$, $\tau = 2$



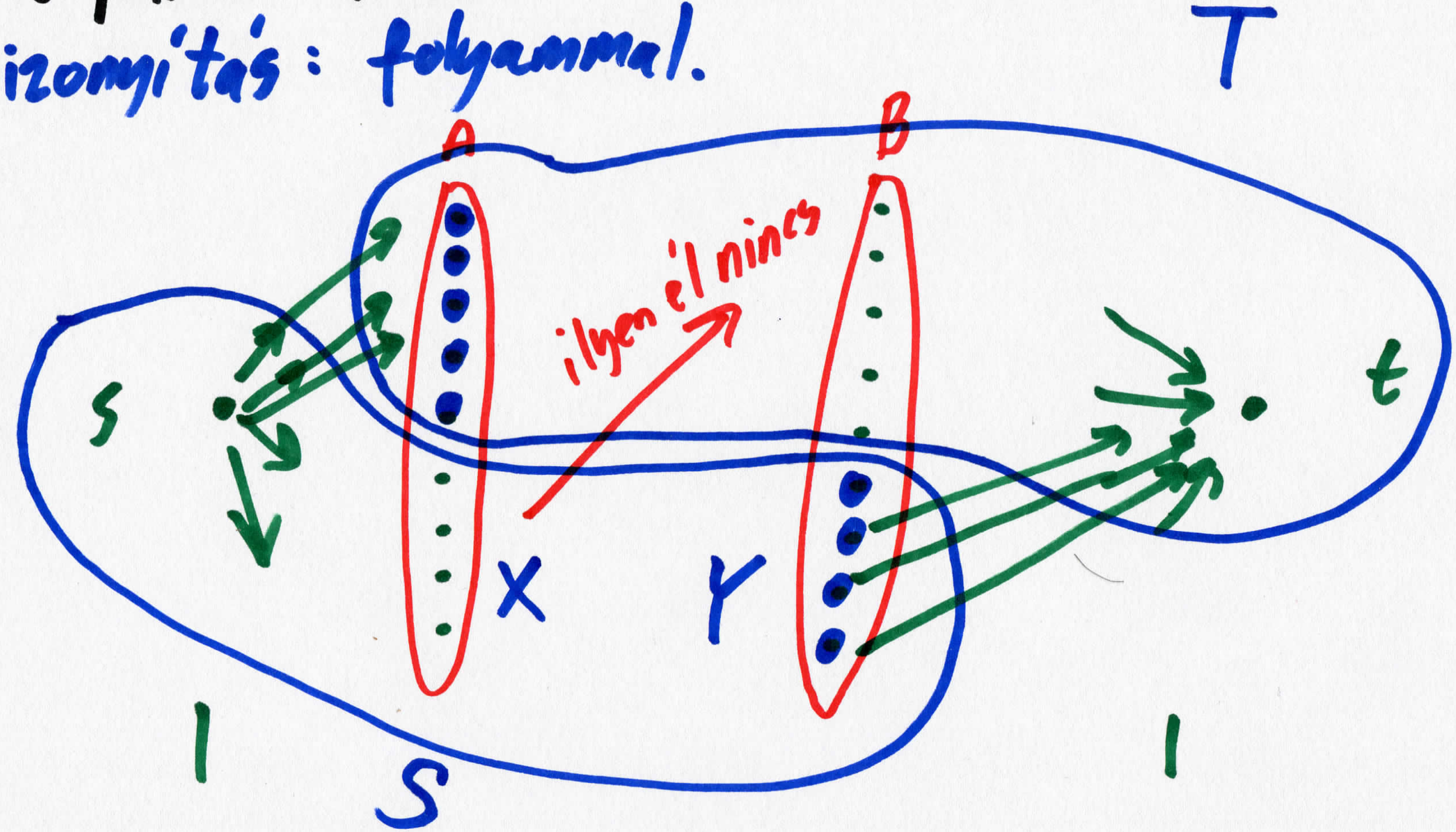
$\nu = \tau = 1$

König: Ha G páros gráf, akkor $\nu(G) = \tau(G)$.

G páros : $\nu = \tau$

Bizonyítás: folyammal.

$c(S,T) = k = \nu(G)$



$c(S,T) = |A - X| + |Y| = \nu(G)$ DE: $A - X \cup Y$ lefogó ponthalmaz!

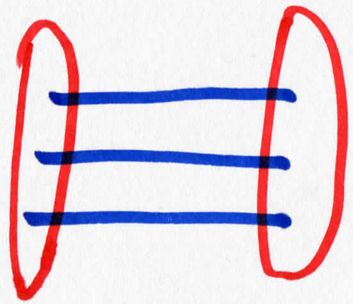
Tehát van ν méretű lefogó: $\tau \leq \nu$.

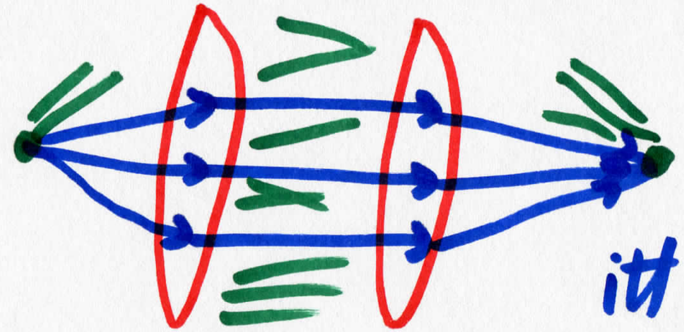
viszont $\tau \geq \nu$ mindig

$\tau = \nu$

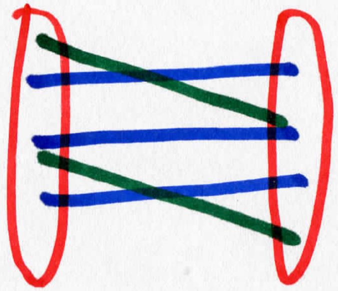
Max. független él keresése ⟷ max folyam keresése:

alternáló utas algoritmus ⟷ javító utas módszer

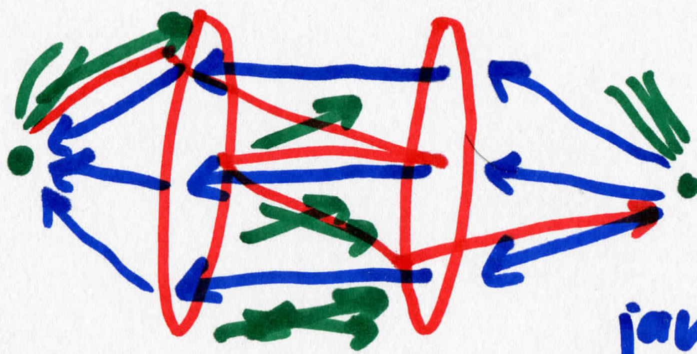




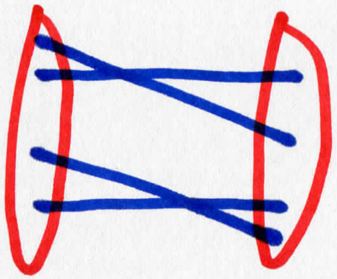
itt tartunk



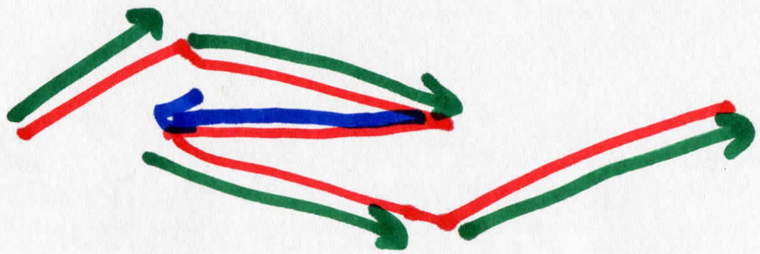
alternáló út



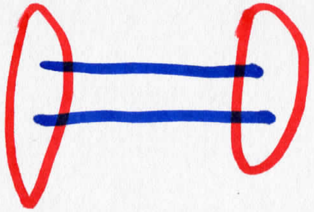
jav. gráf.



jav. párosítás

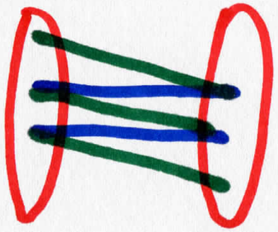


jav út



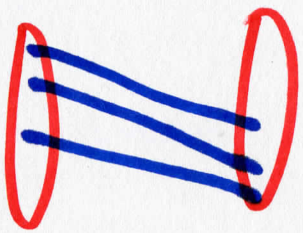
párosítás

$\Downarrow$



alternáló út
(javító út)

$\Downarrow$



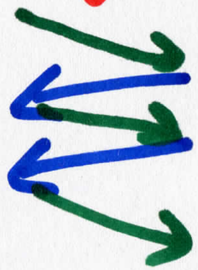
nagyobb párosítás

folyam

$\Downarrow$

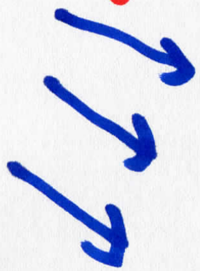
jav gráf

$\Downarrow$



jav út

$\Downarrow$



új folyam

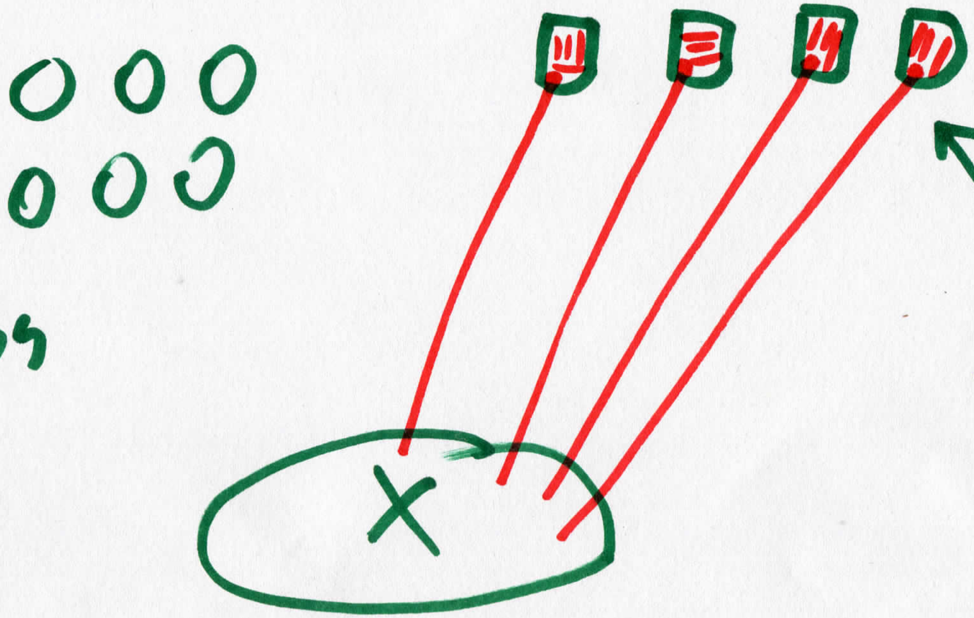
G nem feltétlenül páros gráf. $X \subseteq V(G)$.

$C_p(G \setminus X)$: $G \setminus X$ páratlan méretű komponenseinek a száma.

Tutte: G-ben van teljes párosítás $\Longleftrightarrow$ minden $X \subseteq V(G)$: $C_p(G \setminus X) \leq |X|$.

Biz: csak $\Longrightarrow$: Tfh G-ben van teljes párosítás:

páratlan



páros

min 1 pont kimarad: X-hez kell párosítani: