Kombinatorika és gráfelmélet 1.

6. gyakorlat, 2024. március 25.

Magasabb összefüggőség, Menger

Tudnivalók:

A G gráf k-szorosan (pont)összefüggő, ha legalább $k+1$ csúcsa van és akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb csúcsot, a megmaradt gráf összefüggő.

A G gráf k-szorosan élösszefüggő, ha akárhogy hagyunk el belőle k-nál kevesebb élt, a megmaradt gráf összefüggő.

Világos, hogy ha G k-szorosan pont- vagy élösszefüggő, akkor $k-1$-szeresen is az. A G gráf (pont)összefüggőségi száma, $\kappa(G)$, a legnagyobb k, amelyre G k-szorosan (pont)összefüggő. A G gráf élösszefüggőségi száma, $\lambda(G)$, a legnagyobb k, amelyre G k-szorosan élösszefüggő.

Minden G gráfra $\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq d_{\min}$. (Durván szólva élekkel nehezebb szétszedni a gráfot, mint pontokkal, és a minimális fokú pontot mindig le tudjuk vágni a csatlakozó élek elhagyásával.)

Menger tételek: (4 tétel együtt) G egy [irányított/irányítatlan] gráf, s, t két csúcsa.
G-ben az [irányított/irányítatlan] [pontdiszjunkt/éldiszjunkt] $s-t$ utak maximális száma
$=$ az [irányított/irányítatlan] $s-t$ utakat lefogó [pontok/élek] minimális száma.
A pont-pontdiszjunkt esetben feltesszük, hogy nincs (irányított) $s-t$ él, és a lefogó pontok különböznek s-től és t-től.

Bizonyítás: folyamokkal.

További Menger tételek: G irányítatlan gráf k-szorosan (pont)összefüggő $\Leftrightarrow$ legalább $k+1$ csúcsa van és bármely két csúcsa között van k pontidegen út.
G irányítatlan gráf k-szorosan élösszefüggő $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között van k élidegen út.

Dirac tétel: G k-szorosan (pont)összefüggő $\Rightarrow$ bármely k pontján át van kör.

1. Mutassunk példát olyan véges, egyszerű G gráfra, amire $\lambda(G) \neq \kappa(G)$. Lehet-e a két összefüggőség közül a nagyobbikat a kisebbiknek egy alkalmas függvényével felülről becsülni?
2. Tetszőleges $1 < \kappa < \lambda$ pozitív egészekre konstruáljunk G gráfot, amire $\lambda(G) = \lambda$ és $\kappa(G) = \kappa$.
3. Határozzuk meg a K_n teljes gráf $\lambda(K_n)$ ill. $\kappa(K_n)$ élösszefüggőségi ill. pontösszefüggőségi számát. Ugyanez a kérdés a $K_{n,n}$ teljes páros gráfra.
4. Legyen G az a gráf, mely egy 8 hosszú körből úgy keletkezik, hogy a körön átellenes csúcsokat egy-egy éllel összekötjük. Igazoljuk, hogy $\kappa(G) = 3$.
5. A 10-csúcsú teljes gráfnak legfeljebb hány élét lehet elhagyni úgy, hogy a maradék gráf 4-élösszefüggő legyen?
6. Bizonyítsuk be, hogy bármely n csúcsú k-összefüggő gráfnak legalább $kn/2$ éle van!
7. Igazoljuk, hogy tetszőleges r-reguláris ($r > 1$) egyszerű összefüggő páros gráf 2-összefüggő!
8. Mutassuk meg, hogy tetszőleges G véges gráf esetén $\delta(G) \geq \lambda(G) \geq \kappa(G)$ teljesül. ($\delta(G)$ G-ben a legkisebb fokszám.)
9. Mutassuk meg, hogy a G egyszerű gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha bármely két csúcsára található olyan kör G-ben, amely ezen csúcsokat tartalmazza. Igazoljuk, hogy egy izolált pontot nem tartalmazó, egyszerű G gráf pontosan akkor 2-összefüggő, ha G bármely két élén keresztül vezet G-nek köre.
10. Tegyük fel, hogy a G gráf k-(é)összefüggő. Vegyünk fel egy új x pontot, és kössük össze G k különböző pontjával. Mutassuk meg, hogy az így kapott G' gráf is k-(él)összefüggő!
11. Bizonyítsuk be, hogy ha a G irányított gráfban van u-ból v-be is és v-ből w-be is k éldiszjunkt irányított út akkor G-ben létezik u-ból w-be is k éldiszjunkt irányított út.
12. Legyenek A, B, C páronként diszjunkt, r-elemű halmazok, és $V(G) = A \cup B \cup C$ a G gráf csúcshalmaza, valamint legyen $uv \in E(G)$, ha u és v nem ugyanabból az r-elemű halmazból valók. Mekkora $\kappa(G)$?

13. Adjunk hatékony algoritmust egy tetszőleges irányítatlan gráf pontösszefüggőségének meghatározására.
14. Legfeljebb mekkora lehet két fa uniójának él- ill. pontösszefüggősége?
15. Igazoljuk, hogy ha a G gráf 2019-pontú és 32-összefüggő, akkor G bármely két csúcsa között vezet legfeljebb 64 élű út.
16. Igazoljuk, hogy ha egy n pontú egyszerű G gráfban minden fokszám legalább $(n + k - 2)/2$, akkor G k-öf!
17. $*$ Igazoljuk Dirac tételét: ha $\kappa(G) \geq k \geq 2$, akkor G bármely k pontjához található G-nek olyan köre, amely mind a k pontot tartalmazza.
18. $*$ Mutassuk meg, hogy a 2-összefüggő ill. 2-élösszefüggő gráfoknak van fülfelbontása. Azaz, a 2-öf gráfok pontosan azok, amelyek felépíthetők egyetlen csúcsból fülek egymás utáni hozzáadásával. Itt minden fül a már felépített félkész gráf két különböző csúcsa közti olyan út, amelynek belső csúcsai nem szerepelnek az eddig felépített gráfban. A 2-élöf gráfok fülfelbontására hasonló igaz, megengedve, hogy egy fülnek a két vége ugyanaz a csúcs legyen. (Irányított gráfokra hogyan terjeszthetők ki ezek az állítások?)
19. $*$ Igazoljuk, hogy tetszőlges G véges, irányítatlan gráfnak pontosan akkor van erősen összefüggő irányítása (azaz olyan, amelyre bármely két csúcs között mindkét irányba van irányított út), ha G kéteszeresen élösszefüggő.

Házi feladat

1. Igazoljuk, hogy ha az azonos ponthalmazon megadott G_1 és G_2 gráfok élhalmaza diszjunkt, akkor $\lambda(G_1 + G_2) \geq \lambda(G_1) + \lambda(G_2)$. Igaz-e, hogy ekkor $\kappa(G_1 + G_2) \geq \kappa(G_1) + \kappa(G_2)$ is teljesül? ($G_1 + G_2$ azt a gráfot jelenti, aminek csúcshalmaza a két gráf közös csúcshalmaza, éleit pedig a két élhalmaz uniója adja.)
2. Tegyük fel, hogy a G gráf a rögzített x és y pontokat összekötő pontidegen utak maximális száma 5. Lehet-e az x és y pontokat összekötő utakat lefogó élek minimális száma 1, 2, 3, 4, 5, 6, ill. 7?