Kombinatorika és gráfelmélet 1.

2. gyakorlat, 2024. február 23.

Gráfelméleti alapfogalmak, fák, Prüfer-kód

Tudnivalók:

G összefüggő, ha bármely két csúcsa között vezet út $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között vezet séta $\Leftrightarrow$ bármely két csúcsa között vezet élsorozat. (pl legrövidebb ilyen élsorozat egy út)

G összefüggő és van benne kör: elhagyható egy él úgy, hogy összefüggő marad. G körmentes és nem összefüggő: hozzávehető egy él úgy, hogy körmentes marad.

Fa: olyan gráf, ami összegüggő és körmentes.

Minden összefüggő gráf tartalmaz fát. Minden körmentes gráf kibővíthető fává. Minden fában van legalább két levél (1-fokú csúcs). Minden n csúcsú fának $n-1$ éle van.

Fa: összegüggő és körmentes $\Leftrightarrow$ összegüggő és $n-1$ éle van $\Leftrightarrow$ körmentes és $n-1$ éle van.

Cayley tétel: n számozott ponton n^{n-2} különböző fa van. Bizonyítás: Legyenek a csúcsok $1, 2, \ldots, n$. Fa $\Leftrightarrow$ $n-2$ hosszú kód, minden eleme $1, \ldots n$ (Prüfer kód).

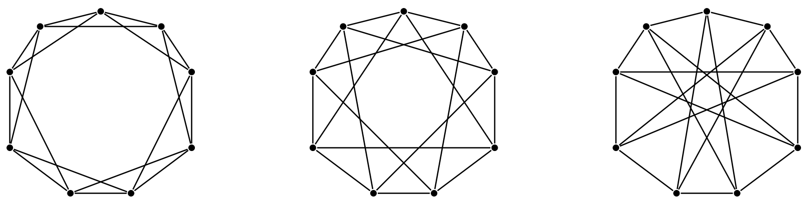
Fa $\Rightarrow$ Prüfer kód: w_1: legkisebb sorszámú levél, elhagyjuk, szomszédját felírjuk: v_1, ezt ismételjük: $v_1 v_2 \ldots v_{n-1}$, ez a kibővített Prüfer kód. v_{n-1} mindig n. Ezt elhagyva: $v_1 v_2 \ldots v_{n-2}$, a Prüfer kód.

Megfigyelés: Prüfer kódban v_i $d(v_i) - 1$-szer szerepel. Speciálisan v_i levél akkor és csak akkor, ha nem szerepel.

Prüfer kód $\Rightarrow$ fa: $v_1 v_2 \ldots v_{n-2}$ Prüfer kód, legyen $v_{n-1} = n$, kibővített Prüfer kód: $v_1 v_2 \ldots v_{n-2} n$. Megkeressük az elhagyott csúcsokat, $w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$-et. Amikor v_i-t felírtuk, w_i-t hagytuk el. Rekurzívan, $i = 1, 2, \ldots, n-1$-re: w_i a legkisebb index, ami nem szerepel a $w_1 w_2 \ldots w_{i-1} v_i v_{i+1} \ldots v_{n-1}$-ben. A kapott gráf élei: $v_i w_i$, $i = 1, \ldots, n-1$. Ez egy fa lesz, aminek $v_1 v_2 \ldots v_{n-2}$ a Prüfer kódja.

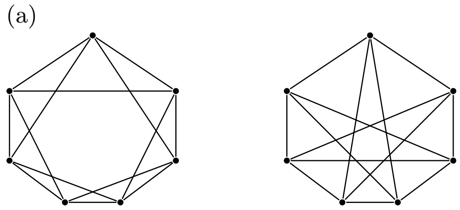
1. Rajzoljunk olyan egyszerű gráfokat, amiknek rendre $6, 7, 8, 9$ csúcsa van és minden csúcs foka 3.
2. Határozzuk meg az összes olyan, lényegesen különböző egyszerű gráfot, melyekre rendre $v = 4$, $e = 5$, ill. $v = 5$, $e = 3$, ill. $v = 5$, $e = 7$, ill. $v = 5$, $e = 8$, teljesül, ahol v jelöli a pontok számát, e pedig az élek számát!
3. Hány 50 csúcsú, 1223 élű, lényegesen különböző (páronként nem izomorf) egyszerű gráf létezik?
4. Döntsük el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre $1, 2, 2, 3, 3, 3$ ill. $1, 1, 2, 2, 3, 4, 4$ ill. $2, 3, 3, 4, 5, 6, 7$ ill. $1, 3, 3, 4, 5, 6, 6$.
5. Bizonyítsuk be, hogy ha G tetszőleges egyszerű gráf, akkor a G vagy $\overline{G}$ gráfok valamelyike összefüggő!
6. Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges n pontú fában a másodfokú pontok száma nem lehet pontosan $(n-3)$-mal egyenlő!
7. Az előre megszámozott (címkézett) n darab pont közé hányféleképp húzhatunk be éleket úgy, hogy egyszerű gráfhoz jussunk?
8. Igazoljuk, hogy ha G véges gráf, akkor páratlan fokú pontjainak száma páros. Mutassuk meg, hogy ha G nem véges, akkor ez nem feltétlenül igaz.
9. Hány olyan, páronként nem izomorf, 6 pontú, összefüggő, egyszerű gráf létezik, melyben két másodfokú és négy harmadfokú pont van?
10. Mutassuk meg, hogy ha G egyszerű gráf, akkor élei irányíthatóak úgy, hogy ne jöjjön létre irányított kör.
11. Igazoljuk a következő állítást. Ha T_1 és T_2 két fa ugyanazon a véges ponthalmazon, és e_1 T_1 éle, akkor létezik T_2-nek egy e_2 éle, hogy $T_1 - e_1 + e_2$ és $T_2 - e_2 + e_1$ is fa.
12. Hogy néz ki az a lehető legkevesebb csúcsot tartalmazó egyszerű gráf, amelyben a legrövidebb kör hossza pontosan 4 és minden pont harmadfokú?
13. Mutassunk a komplementerével izomorf, 5- ill. 6-pontú gráfot!
14. Hány pontja van annak a T fának, melyre $|E(\overline{T})| = 15 \cdot |E(T)|$?
15. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek pontjai a 4 hosszú nullákból és egyesekből álló sorozatok és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha egyik a másikból egy ,,forgatással'' megkapható, azaz ha az egyik a (b_1, b_2, b_3, b_4) akkor a másik a (b_2, b_3, b_4, b_1) sorozathoz tartozó pont.

16. Igazoljuk, hogy ha egy $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n$ sorozat egy egyszerű gráf fokszám listája, akkor teljesül rá a következő feltétel:
$$\sum_{i=1}^{k} d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min(d_i, k), \quad \forall k \in \{1, 2, \ldots n\}$$
(Igazából az állítás megfordítása is igaz: ha a fenti feltétel teljesül egy számsorozatra, akkor van hozzá olyan egyszerű gráf, melynek az adott számsorozat a fokszám listája.)
17. Mutassuk meg, hogy egy véges egyszerű gráfnak mindig van két azonos fokszámú csúcsa.
18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges véges G gráfra fennáll, hogy $|E(G)| \geq |V(G)| - c(G)$, ahol $c(G)$ a G gráf összefüggő komponenseinek számát jelöli.
19. Mi lehet a G gráf, ha $\Delta(G) \leq 2$? ($\Delta(G)$ a G gráf maximális fokszámát jelöli.)
20. Egy 3×3 méretű sakktábla négy sarkába két világos és két sötét huszárt állítunk úgy, hogy az azonos színű huszárok átellenes sarokban álljanak. Elérhető-e ebből az állapotból a huszárokkal a szokásos lépéseket végezve, hogy a tábla négy sarkában álljanak a huszárok, de az átellenesek különböző színűek legyenek? (Közben sosem állhat egy mezőn egynél több figura.)
21. Tegyük fel, hogy egy téglalapot véges sok téglalappal kiparkettáztunk. Minden kis téglalapnak legalább az egyik oldala egész hosszúságú. Igazoljuk, hogy a nagy téglalapnak is van egész hosszúságú oldala. (*)
22. Mutassuk meg, hogy ha egy n csúcsú teljes gráf éleit kiszínezzük két színnel, akkor biztosan keletkezik olyan részgráfja, mely n csúcsú fa, és minden éle azonos színű.
23. Egy fának 8 csúcsa van, fokszámai pedig kétfélék. Mi lehet ez a két szám?
24. Melyek izomorfak az alábbi gráfok közül?

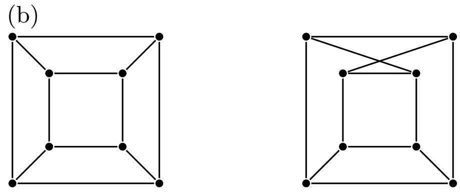


25. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan egyszerű gráf, amelynek pontosan két különböző feszítőfája van.
26. Izomorfak-e az alábbi gráf párok?

(a)



(b)



27. Egy fa Prüfer kódja $(3, 1, 4, 1, 5, 9, 2, 6)$. Mi a kód elkészítéséhez elsőnek törölt levél indexe? Mi a kódhoz tartozó fa?
28. Bizonyítsuk be, hogy ha F fa, akkor leveleinek száma legalább akkora, mint az F-beli csúcsok maximális fokszáma.
29. Bizonyítsuk be, hogy ha egy fának nincs másod- és harmadfokú csúcsa, akkor az összes csúcsának legalább $\frac{2}{3}$ része levél.
30. Melyik fák tartoznak az alábbi Prüfer-kódokhoz: $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)$, $(10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$, $(1, 2, 1, 3, 1, 4, 1, 5, 1, 6)$ ill. $(5, 4, 8, 2, 2, 2, 8)$?
31. Melyek azok a fák, melyek Prüfer-kódja csupa különböző számból áll? És melyek azok, melyeknek csupa azonos számból áll?
32. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melyben a pontpárok távolságai közül a legnagyobb hárommal egyenlő? (Két pont távolságán a köztük levő legrövidebb úton található élek számát értjük.)
33. Hány olyan fa adható meg n címkézett ponton, melynek az n pont levele?
34. A $V = \{1, 2, \ldots, 2n\}$ (számozott) pontokon hány olyan egyszerű G gráf adható meg, melynek $2n - 2$ éle van és két egyforma méretű, összefüggő komponensből áll?

35. Hány különböző olyan fa adható meg az $1, 2, \ldots, 8$ címkézett csúcsokon, ami az $\{1, 2\}$, $\{3, 4\}$, $\{5, 6\}$, $\{7, 8\}$ élek közül legalább az egyiket nem tartalmazza?
36. Legyen $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_n \geq 1$. Bizonyítsuk be, hogy $d_1, d_2, \ldots, d_n$ egy (n csúcsú) fa fokszám sorozata akkor és csak akkor, ha $d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2n - 2$.
37. Bizonyítsuk be, hogy egy fában tetszőleges két leghosszabb útnak van közös csúcsa.
38. Bizonyítsuk be, hogy egy fában *az összes* leghosszabb útnak van közös csúcsa. (*)

Házi feladatok

1. Adjuk meg az összes, legalább két csúcsú önkomplementer fát, vagyis az összes olyan legalább két csúcsú fát, ami izomorf a komplementerével!
2. Hány olyan fa van a $v_1, v_2, \ldots, v_n$ csúcsokon, amelynek
   a. $v_{n-1}v_n$ éle?
   b. v_1v_2 éle?