Élkromatikus szám.

G gráf, $L(G)$: élgráf.

G élei $\longleftrightarrow$ $L(G)$ csúcsai

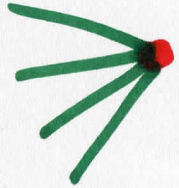
közös csúcs $\longleftrightarrow$ él

élszinezés $\longleftrightarrow$ csúcsszinezés

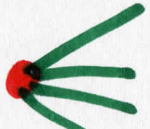
élkromatikus szám $\longleftrightarrow$ kromatikus szám

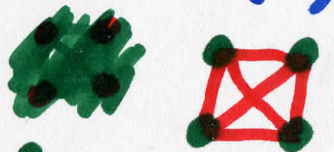
$$\chi'(G)=\chi_e(G) = \chi(L(G))$$

$$\chi'(G) \geq \Delta(G)$$

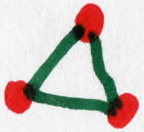
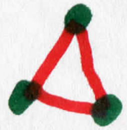
csupa különböző szín $\longrightarrow$  Δ

$$\chi'(G)=\chi(L(G)) \geq \omega(L(G)) \geq \Delta(G)$$

 $\longrightarrow$ klikk $L(G)$-ben



G-ben

 $\longrightarrow$ 

Ha $\Delta(G) \geq 3$, akkor

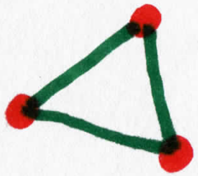
$$\omega(L(G)) = \Delta(G)$$

<u>Vizing tétel:</u> minden G gráfra

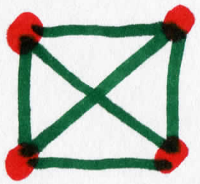
$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G)+1$$

<u>König tétel:</u> ha G páros gráf, akkor

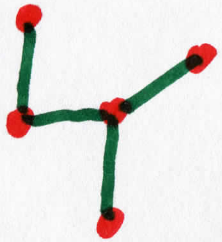
$$\Delta(G) = \chi'(G)$$



$\chi' = 3$

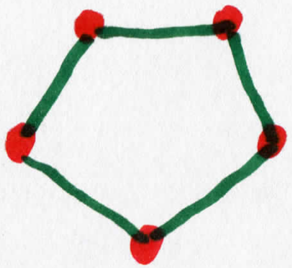


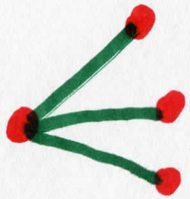
$\chi' = 3$



FA: $\chi' = \Delta$

ÚT: $\chi' = 2$



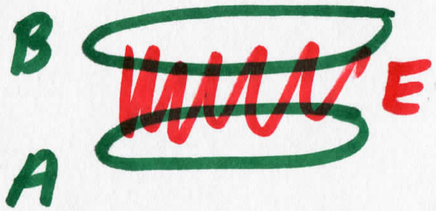


König: G páros $\longrightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$

Biz. 1. G páros gráf, reguláris (minden fok ugyanannyi) $\longrightarrow$ van benne teljes párosítás.

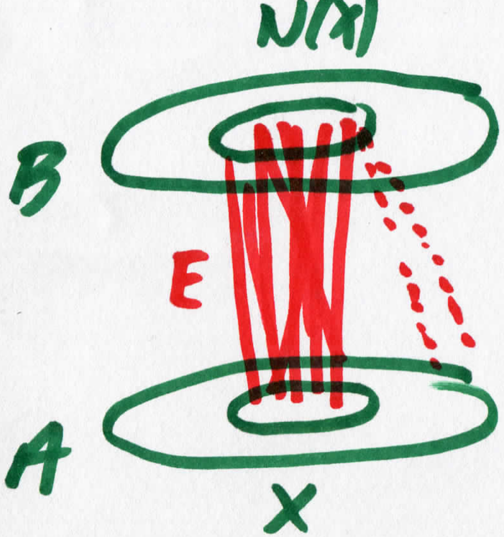
G-ben lehetnek párhuzamos élek is!

Tfh minden fok $= r$.



$$|A| \cdot r = |E| = |B| \cdot r$$

$$\underline{|A| = |B|}$$



$$|X| \cdot r = |E| \leq |N(X)| \cdot r$$

$$\underline{|X| \leq |N(X)|}$$

Frobenius: van teljes párosítás

Biz. 2. G r-reguláris páros gráf.

$\xRightarrow[\text{előző}]{}$ van teljes párosítás $\xrightarrow[\text{hagyjuk el}]{}$ (r-1)-reguláris páros gráf $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ van teljes párosítás $\longrightarrow$ ....

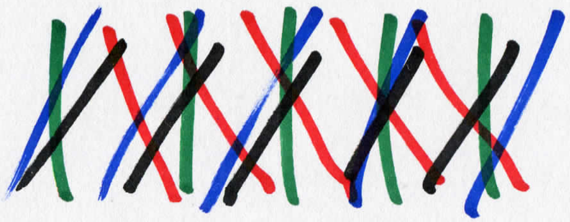
...

G r-reguláris páros gráf: élhalmaz felbomlik r db teljes párosításra.

Tehát:

G reguláris páros gráf: $\Delta(G) = \chi'(G)$

1. szín: 1. párosítás. 2. szín: 2. párosítás ....

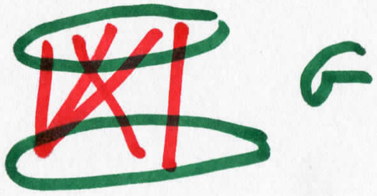


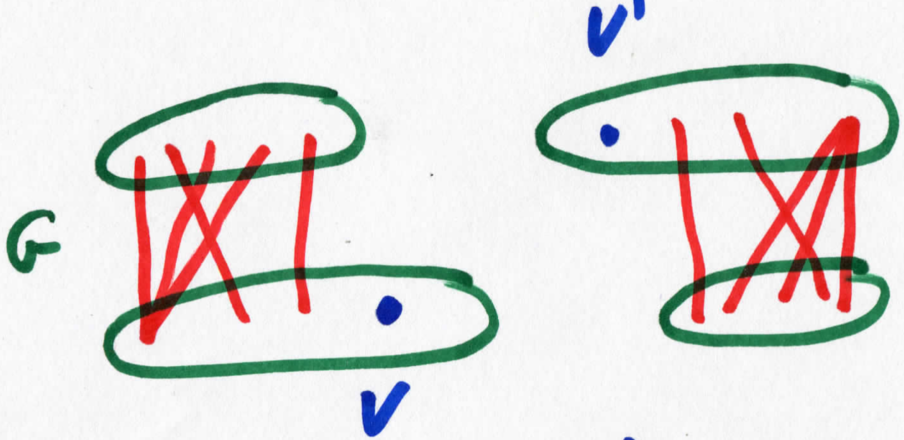
... r. szín: r. párosítás

König: G páros $\longrightarrow \chi'(G) = \Delta(G)$

Megvan, ha G reguláris! Ha nem: kiegészítjük!

Leggyen $\Delta(G) = r$

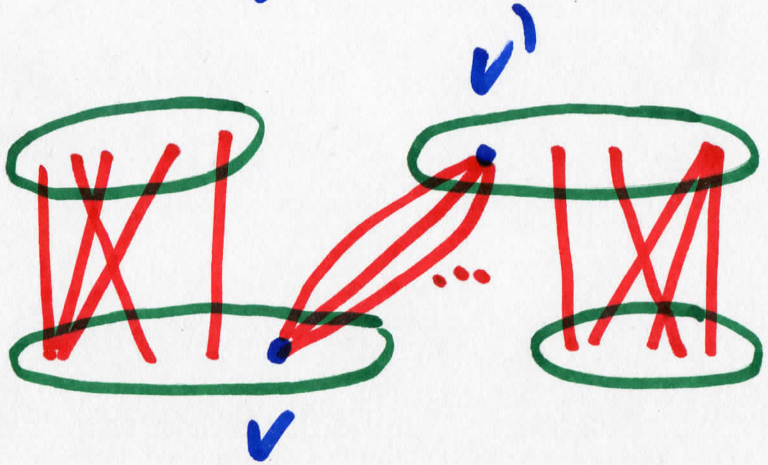




G fejjel lefele.

Minden v, v' párra:

$\Delta(G) - d(v)$ párhuzamos él.



$\Longrightarrow$ r-reguláris! $\chi' = r$

$\Longrightarrow \chi'(G) = r$

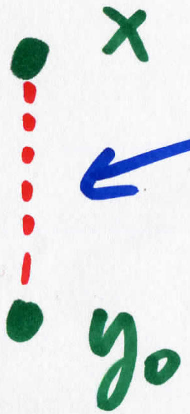
<u>Vizing:</u> minden G gráfra $\Delta(G) \le \chi'(G) \le \Delta(G)+1$

ezt már láttuk

$\chi' \le \Delta+1$ Biz: indukció élek számára.

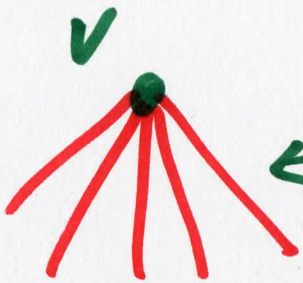
(1, 2, 3 .. él: triviális)

G adott. $G \setminus xy_0$: kiszínezhető $\Delta+1$ színnel.

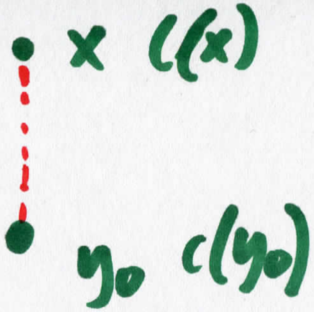


már csak ezt kellene kiszínezni

$\Delta+1$ szín, max fok $=\Delta \Longrightarrow$ minden v csúcshoz van $c(v)$ szín: ilyen színű él nincs v-n.



$\leftarrow c(v)$ szín nincs

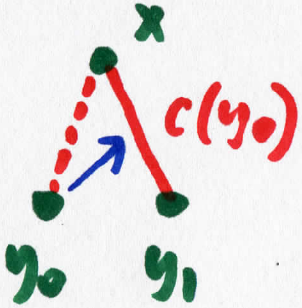


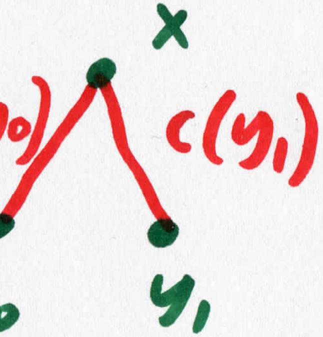
Ha $c(x)=c(y_0)$: KÉSZ! xy_0 legyen $c(x)=c(y_0)$ színű.

Tehát $\underline{c(x)\neq c(y_0)}$

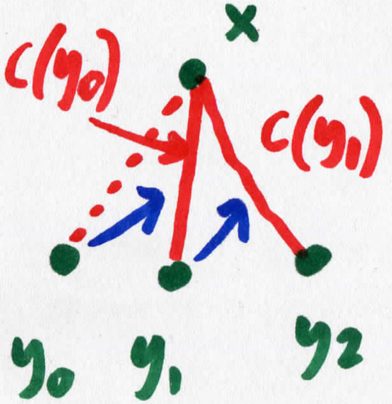
Ha mégis kiszínezhetjük xy_0-t $c(y_0)$-ra: KÉSZ

Tehát: van $\underline{xy_1}$ él, ami $c(y_0)$ színű.

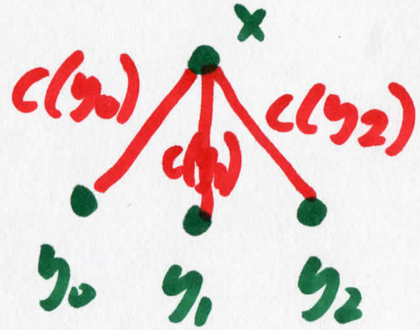




Ha xy_1-et átszínezhetjük $c(y_1)$-re: xy_0 lehet $c(y_0)$ színű, KÉSZ

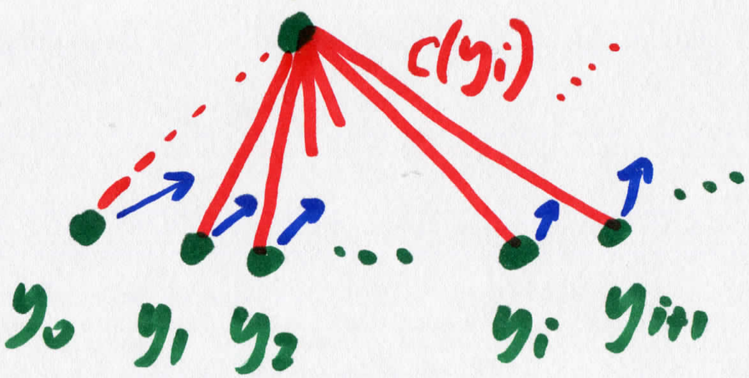


Ha nem: van $\underline{xy_2}$ él, ami $c(y_1)$ színű.

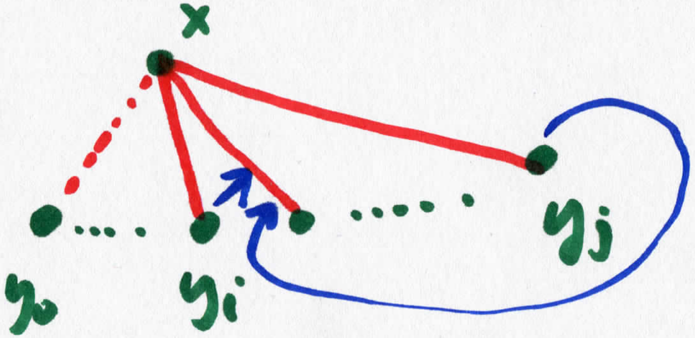


Ha xy_2-t átszínezhetjük $c(y_2)$-re: KÉSZ

ÉS ÍGY TOVÁBB...



Ha nem akadunk el, egyszerrsak:

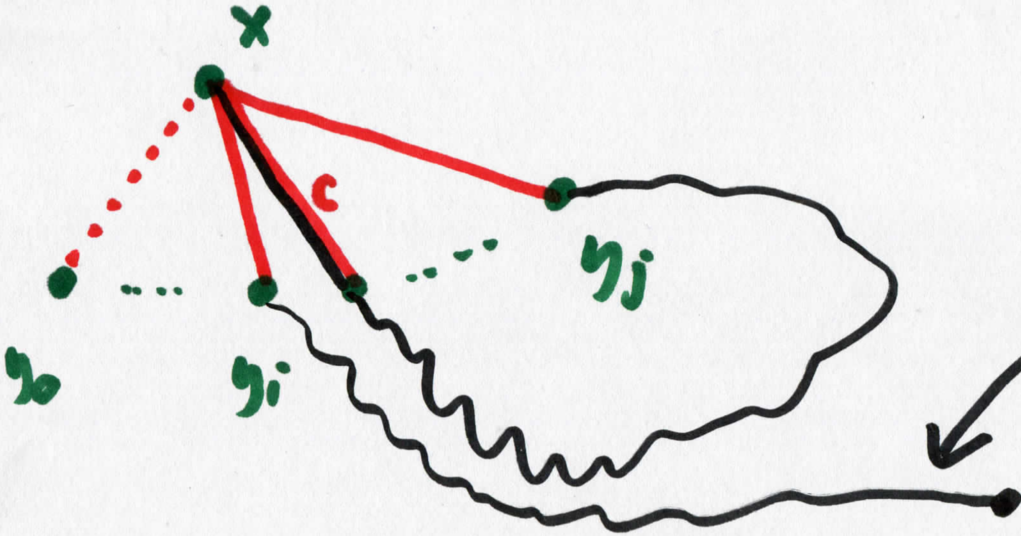


vagyis $\underline{c(y_i) = c(y_j) = c}$

<u>c és c(x) színű élek</u>: max 2 db egy csúcson ⟹ <u>körök és utak.</u>

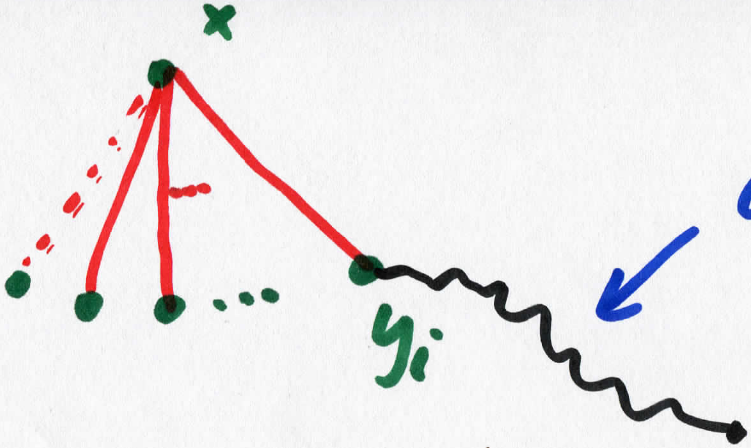
x-ben hiányzik a c(x),
y_i-ben és y_j-ben c ⟹ x-ből, y_i-ből, y_j-ből indul <u>c + c(x)</u> <u>út.</u>

x-ből induló: <u>nem</u> y_i-ben ér véget (vagy nem y_j-ben)



y_i-ből induló c + c(x) úton:

<u>cseréljük meg</u>
<u>a c és c(x) színeket!</u>



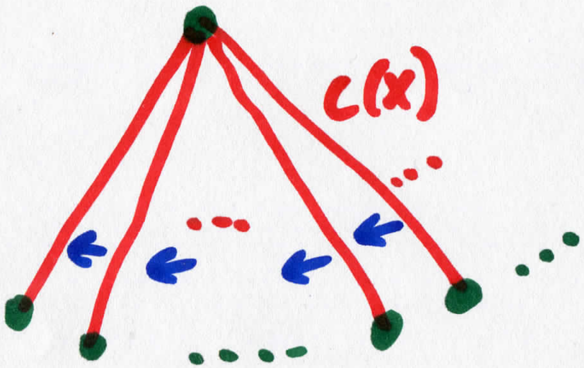
$c \leftrightarrow c(x)$ csere. MOST: y_i-ben $c(x)$ hiányzik!

Legyen xy_i $c(x)$ színű,

xy_{i-1} xy_i eredeti színe

$\vdots$

xy_0 xy_1 eredeti színe



KÉSZ