Kombinatorika és gráfelmélet I.

Elemi leszámlálások, szita formula, skatulya elv

Ismétlés nélküli permutáció:

n különböző elem, mondjuk $\{1,2,\dots n\}$ permutációja:

$\sigma : \{1,2\dots n\} \leftrightarrow \{1,2,\dots n\}$ bijekció

$\sigma : \{1,2\dots n\} \rightarrow (\sigma(1), \sigma(2)\dots \sigma(n))$: $1,2\dots n$ valamilyen sorrendben.

$\sigma(i)=j$: a σ permutációban az i-edik helyen a j van.

n elem ismétlés nélküli permutációinak a száma:

$n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots 1 = n!$ ($\sigma(1)$: n lehetőség, $\sigma(2)$: $n-1$ lehetőség $\dots$ $\sigma(n)$: 1 lehetőség)

Ismétléses permutáció: n elem, $n = n_1 + n_2 + \cdots n_k$

n_1 db egyforma, n_2 db egyforma ... n_k egyforma.
(k féle elem)

Különböző sorrendek száma: $$\frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_k!}$$

Biz: Ha meg tudnánk különböztetni az összes elemet:
$\underline{n!}$ sorrend van. De egyforma elemek egymás közti sorrendjét nem tudjuk megkülönböztetni:
$n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots n_k!$ esetet egyformának látunk.

$$\Rrightarrow \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdots n_k!}$$ különböző sorrend.

n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli variációinak a száma:

$V(n,k)$: n különböző elemből k különbözőt, sorrend számít.
$(n \geq k)$

első: n lehetőség, második: $n-1$, ... k-adik: $n-k+1$ lehetőség

$\rightarrow$ $V(n,k) = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ (30 ember, futóverseny, első 3 hányféle lehet: $30 \cdot 29 \cdot 28$)

n elem k-ad osztályú ismétléses variációinak a száma:

$V_{ism}(n,k)$: n különböző elemből k nem feltétlenül különbözőt, sorrend számít.

első: n lehetőség, második: n lehetőség, ... k-adik: n lehetőség

$\rightarrow$ $V_{ism}(n,k) = n^k$

(30 ember, 3 verseny, hányfélék lehetnek a győztesek:
$30 \cdot 30 \cdot 30 = 30^3$)

<u>n elem k-ad osztályú ismétlés nélküli kombinációinak a száma:</u>

$C(n,k)$: n különböző elemből <u>k különbözőt, sorrend nem számít.</u>

első: n lehetőség, második: $n-1$, ... k-adik: $n-k+1$ lehetőség.

de így minden k-ast $k!$-szor találtunk meg!

$$\rightarrow C(n,k) = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

(30 ember, 3 fog megbukni : $\binom{30}{3} = \frac{30\cdot 29\cdot 28}{6}$ lehetőség)

$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$: képletből trivi.

n elemből k $\longleftrightarrow$ n elemből $n-k$ (komplementer)

n elem k-ad osztályú ismétléses kombinációinak a száma:

$C_{ism}(n,k)$: n féle elemből összesen k-t, sorrend nem számít.

1. fajtából a_1-et választottunk, ... i-ik fajtából a_i-t ...

$a_1 + a_2 + \dots a_n = k$, $a_i \geq 0$, hány megoldás van?

$(a_1, a_2 \cdots a_n) \longleftrightarrow$ 0-1 sorozat: a_1 db 1-es, 0, a_2 db 1-es, 0, ... a_n db 1-es

$$\underbrace{1111\cdots1}_{a_1}\,0\,\underbrace{1111}_{a_2}\,0\,111 \quad \cdots\cdots \quad 0\,\underbrace{111111}_{a_n}$$

sorozat: $a_1 + a_2 + \dots a_n = k$ db 1-es, $n-1$ db 0.

Hány ilyen van? $\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

Tehát $C_{ism}(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$

30 féle faggyi, 3 gombócos faggyikehely: $\binom{32}{3} = \binom{32}{29}$
n k
lehetőség.

3 féle faggyi, 30 gombócos faggyikehely: $\binom{32}{30} = \binom{32}{2}$
n k
lehetőség

(faggyikehely: sorrend nem számít)

Láttuk: $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$. (képletből nyilván kijön)

Biz: $\{1,2\ldots n\}$ k elemű részhalmazai : $\binom{n}{k}$

k elemű részhalmazok, amelyekben benne van az 1: $\binom{n-1}{k-1}$

amiben nincs benne az 1: $\binom{n-1}{k}$

$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\cdots\binom{n}{i}+\cdots\binom{n}{n}=2^n$ ← 1,2.. n összes részhalmaza

1,2 ... n összes i elemű részhalmaza

Binomiális tétel: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \cdot a^i \cdot b^{n-i}$

Pl $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Biz: $(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\cdots\quad(a+b)}_{n \text{ db.}}$ ha beszorozzuk: összesen 2^n tag.

Hányféleképpen kaphatjuk meg az $a^i \cdot b^{n-i}$-t?

i helyről a-t választunk, a többi n-i helyről b-t:

$\binom{n}{i}$ lehetőség.

Pascal háromszög:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & & & & \vdots & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} & & \binom{0}{0} & & \\ & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & \\ \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} \\ & & \vdots & & \end{array}$$

n-edik sor i-edik elem: $\binom{n}{i}$.

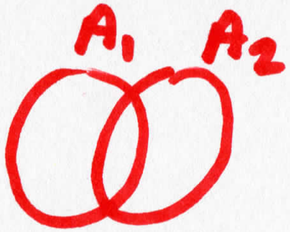
Minden elem a fölötte levő két elem összege.

$$\begin{array}{ccc} A & & B \\ & A+B & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \binom{n-1}{k-1} & & \binom{n-1}{k} \\ & \binom{n}{k} & \end{array}$$

Szita formula.

A_i: véges halmazok.



$$|A_1 \cup A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$$

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

$A_1, A_2 \dots A_n$ véges halmazok. $\left|\bigcup_{i}^{n} A_i\right| = \sum_{i}^{n} |A_i| - \sum |\text{2-es metszetek}|$

$+ \sum |\text{3-as metszetek}| - \dots (-1)^{n+1} \cdot |\text{n-es metszet}|$

Szita form. biz: Belátjuk, hogy a jobboldal $\bigcup_{i}^{n} A_i$ minden elemét pontosan egyszer számolja. Tfh x pontosan k db A_i-ben van benne.

Ekkor a $\sum |\text{i-es metszetek}|$ $(i \leq k)$ x-et $\binom{k}{i}$-szer számolja.

Tehát x-et $k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \dots (-1)^{i+1} \binom{k}{i} \dots (-1)^{k+1} \cdot \binom{k}{k}$ -szor számoltuk.

Kell:

$$k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 1$$

$$-1 + k - \binom{k}{2} + \binom{k}{3} - \cdots (-1)^{k+1}\binom{k}{k} = 0$$

$$-(1-1)^k = 0 \quad \checkmark$$

KÉSZ.

(binomiális tételből)

SKATULYA ELV:

$n > k$, n elem k dobozba $\Rightarrow$ lesz két elem, ami ugyanabba a dobozba került.

Skatulya elv alkalmazás: Erdős-Szekeres tétel.

$a_1\ a_2 \cdots\ a_m$ számsorozat. Részsorozat:

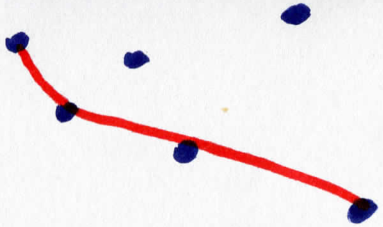
$a_{i_1}\ a_{i_2} \cdots a_{i_k}$ $\quad i_1 < i_2 \cdots < i_k$ (néhány tag, az eredeti sorrendben)

E-S tétel: $a_1\ a_2 \cdots\ a_m$ különböző számokból álló sorozat, $m = n^2+1$. Ekkor a sorozat tartalmaz egy $n+1$ hosszú növekedő vagy csökkenő részsorozatot.
$m = n^2$-re már nem feltétlenül igaz.

Biz: $a_1 \cdots\ a_m$. Def minden i-re: n_i és c_i:

n_i az a_i-ben végződő leghosszabb növekedő részsorozat hossza.

c_i ——— " ——— csökkenő ——— " ———

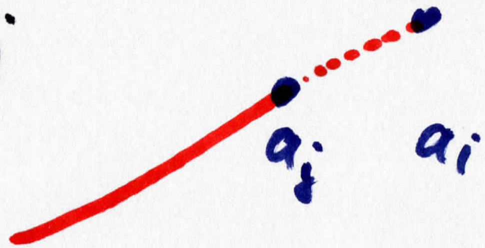


$n_6 = 1$
$c_6 = 4$

Megfigyelés: Legyen $i > j$. Ekkor $(n_i, c_i) \neq (n_j, c_j)$.

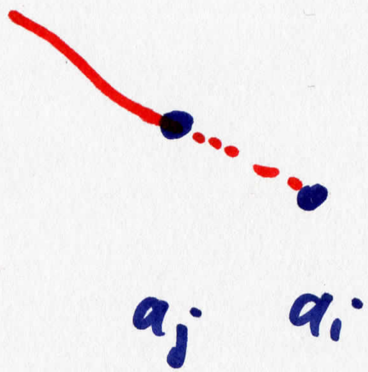
Biz: Ha $a_i > a_j$: minden a_j-ben végződő <u>növekedő</u> részsorozat kiegészíthető a_i-vel.

$\rightarrow n_i > n_j$



Ha $a_i < a_j$: minden a_j-ben végződő <u>csökkenő</u> részsorozat kiegészíthető a_i-vel.

$\rightarrow c_i > c_j$



$\Rightarrow (n_i, c_i) \neq (n_j, c_j)$

$a_1 \dots a_m$ sorozat, $m=n^2+1$. Ha valamelyik $n_i \geq n+1$: van $n+1$ hosszú növekvő részsorozat.

Ha $c_i \geq n+1$: van $n+1$ hosszú csökkenő részsorozat.

Tegyük fel, hogy minden $n_i, c_i \leq n$.

Mivel $n_i, c_i \geq 1$, $n_i, c_i \in \{1, 2 \dots n\}$.

Tehát (n_i, c_i) n^2-féle lehet.

Mivel $i = 1, 2 \dots n^2+1$, van i, j: $(n_i, c_i) = (n_j, c_j)$

ELLENTMONDÁS!

Tehát nem lehet minden $n_i, c_i \leq n$. KÉSZ.

n^2+1 korlát nem javítható. n^2 hosszú sorozat, $n_i, c_i \leq n$: