Legyen $\Delta(G)$ a G gráf csúcsainak maximális fokszáma, $\chi(G)$ pedig G kromatikus száma. A mohó színezésből azonnal látszik, hogy $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$.

Brooks tétel, 1941 *Ha G összefüggő és nem teljes gráf, és nem is páratlan kör, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Először egy gyengébb tételt bizonyítunk be.

Gyenge Brooks tétel *Ha G összefüggő és nem reguláris, akkor $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Első bizonyítás. Mivel G nem reguláris, létezik egy $\Delta = \Delta(G)$–nél kisebb fokú csúcs, legyen ez v_n. Mivel G összefüggő, létezik egy F feszítőfája. Legyen ennek egy v_n–től különböző levele (1-fokú csúcsa) v_1. (Ilyen van, mert minden fának van legalább két levele.) Legyen v_2 az $F - v_1$ fa (fa, mert F egy levelét hagytuk el) egy v_n–től különböző levele. És így tovább, általában legyen v_i az $F - \{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$ fa egy v_n–től különböző levele. Így megkaptuk G csúcsainak egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendjét. Most pedig színezzük ki a csúcsokat ebben a sorrendben, Δ színnel. Az i–edik lépésben ($i < n$) az aktuális v_i csúcsnak van még egy v_j, i–nél nagyobb indexű szomszédja, hiszen a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ csúcsok összefüggő gráfot feszítenek G–ben. Ezért v_i–nek legfeljebb $\Delta - 1$ *már kiszínezett* szomszédja van, így a rendelkezésre álló Δ színből tudunk neki választani színt. Amikor végül v_n–et akarjuk színezni, akkor persze már az összes szomszédja ki lesz színezve, de sebaj, szerencsére neki legfeljebb $\Delta - 1$ szomszédja van, tehát itt sem akadunk el.

Második bizonyítás. A csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. Természetesen 1 csúcsú gráfokra igaz a tétel, sőt, 2 és 3 csúcsú gráfokra sem túlzottan megerőltető belátni. Tegyük föl, hogy G–nek n csúcsa van, és n–nél kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Mivel G nem reguláris, létezik egy $\Delta = \Delta(G)$–nél kisebb fokú csúcs, legyen ez v. Tekintsük a $G - v$ gráfot. Ez már nem feltétlenül összefüggő, legyen K ennek egy tetszőleges összefüggő komponense. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. K reguláris. Mivel K–nak legalább egy csúcsa össze volt kötve v-vel is, ezért K–ban nem lehet minden csúcs foka Δ. Vagyis $\Delta(K) \leq \Delta(G) - 1$. Ezert K kiszínezhető $\Delta(G)$ színnel, hiszen $\chi(K) \leq \Delta(K) + 1 \leq \Delta(G)$.

2. eset. K nem reguláris. Nyilván $\Delta(K) \leq \Delta(G)$, és K összefüggő, tehát alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, ennek alapján K kiszínezhető $\Delta(G)$ színnel.

Tehát $G - v$ minden összefüggő komponense kiszínezhető $\Delta(G)$ színnel, vagyis az egész $G - v$ is kiszínezhető $\Delta(G)$ színnel. Hát akkor színezzük is ki! Mivel v foka G–ben kisebb mint Δ, v–t is ki tudjuk színezni a Δ szín valamelyikére.

A Brooks tétel bizonyítása. Ismét a csúcsok számára vonatkozó teljes indukcióval bizonyítunk. 1, 2, 3 csúcsú gráfokra nyilván igaz a tétel. Tegyük föl, hogy G–nek n csúcsa van, összefüggő, nem teljes gráf, és nem is páratlan kör, és n–nél kevesebb csúcsú gráfokra már beláttuk az állítást. Ha $\Delta(G) = 1$, akkor G (mivel összefüggő) nem is lehet más, mint két csúcsú teljes gráf, ami egy teljes gráf lenne, de feltettük hogy G nem az. Ha $\Delta(G) = 2$, akkor G vagy egy út, vagy egy páros kör, ekkor $\chi(G) = 2$. Tehát ekkor is igaz a tétel. Legyen tehát $\Delta(G) \geq 3$.

Tegyük fel, hogy G–nek van egy v elvágó pontja. Ekkor G felbotható két összefüggő részgráfra, K_1–re és K_2–re, amelyeknek csak v a közös csúcsa. Mivel a v csúcs foka K_1–ben és K_2–ben is kisebb mint Δ, K_1 is, és K_2 is kiszínezhető Δ színnel: ha valamelyikük páratlan kör lenne, akkor kiszínezhető $3 \leq \Delta$ színnel, ha valamelyikük teljes gráf lenne, akkor annak legfeljebb Δ csúcsa van, tehát ekkor is elég Δ szín, a többi esetben pedig az indukciós feltevés alapján lesz elég a Δ szín. Sőt K_1–ben a színek megfelelő cseréjével elérhetjük, hogy v színe K_1–ben és K_2–ben ugyanaz legyen, így összeilleszthetjük a két részt, és megkapjuk G színezését Δ színnel. Tehát mostantól feltesszük hogy G 2–összefüggő.

Legyen v_n egy Δ fokszámú csúcs. Ha mind a Δ darab szomszédja össze van egymással kötve, akkor ezek v_n–nel együtt egy $\Delta + 1$ csúcsú teljes gráfot feszítenek. Ebben minden csúcs foka Δ, tehát egyiknek sincs további szomszédja. Viszont G összefüggő, ezért G maga egy $\Delta + 1$ csúcsú teljes gráf lenne, ami ellentmond a feltevésnek.

Tehát van v_n–nek két szomszédja, mondjuk v_1 és v_2, amik egymással nem szomszédosak. Két esetet különböztetünk meg.

1. eset. $G - \{v_1, v_2\}$ összefüggő. Vegyük a $G - \{v_1, v_2\}$ gráfnak egy F feszítőfáját.

Legyen ennek egy v_n–től különböző levele v_3. Legyen v_4 az $F - v_3$ fa egy v_n–től különböző levele. És így tovább, általában legyen v_i az $F - \{v_3, \ldots, v_{i-1}\}$ fa egy v_n–től különböző levele. Így megkaptuk G csúcsainak egy $v_1, v_2, \ldots, v_n$ sorrendjét. Színezzük ki a csúcsokat ebben a sorrendben, Δ színnel. A v_1 és v_2 csúcsok nem szomszédosak, színezzük ki őket ugyanazzal a színnel. Az i–edik lépésben $(2 < i < n)$ az aktuális v_i csúcsnak van még egy v_j, i–nél nagyobb indexű szomszédja, hiszen a $v_i, v_{i+1}, \ldots, v_n$ csúcsok összefüggő gráfot feszítenek G–ben. Ezért v_i–nek legfeljebb $\Delta - 1$ *már kiszínezett* szomszédja van, így a rendelkezésre álló Δ színből tudunk neki választani színt. Amikor végül v_n–et akarjuk színezni, akkor persze már az összes szomszédja ki lesz színezve, de szerencsére két szomszédja, v_1 és v_2 egyforma színű. Tehát itt sem akadunk el.

2. eset. $G - \{v_1, v_2\}$ nem összefüggő. Mivel G 2–összefüggő, ezért felbontható egy K_1 és K_2 összefüggő részgráfra, amelyeknek csak v_1 és v_2 a közös csúcsa. Legyen K_1' K_1 és a v_1v_2 él, K_2' K_2 és a v_1v_2 él. Könnyen látható hogy $\Delta(K_1') \leq \Delta$ és $\Delta(K_2') \leq \Delta$. Tegyük fel, hogy egyikük sem $\Delta + 1$ csúcsú teljes gráf. Ekkor az indukciós feltevés szerint mindkét komponens színezhető Δ színnel. (Akkor is, ha valamelyik éppen egy páratlan kör, mert $\Delta \geq 3$.) Ráadásul v_1 és v_2 színe mindkét rész színezésében különböző, hiszen össze vannak kötve. Tehát mondjuk K_1–ben a színek megfelelő cseréjével elérhetjük, hogy v_1 illetve v_2 színe K_1–ben és K_2–ben ugyanaz legyen, így összeilleszthetjük a két részt, és megkapjuk G színezését Δ színnel.

Egyetlen egy lehetőség maradt, hogy K_1' vagy K_2', mondjuk K_1' éppen egy $\Delta + 1$ csúcsú teljes gráf. Ekkor K_1 (nem K_1'!) kiszínezhető Δ színnel úgy, hogy a v_1 és v_2 csúcsok színe megegyezik. Viszont K_2–ben ekkor v_1 és v_2 foka is 1. Húzzuk össze K_2–ben a v_1 és v_2 csúcsokat, legyen az új csúcs v'' és a kapott gráf K_2''. A v'' csúcs foka 1 vagy 2, tehát alkalmazhatjuk az indukciós feltevést, K_2'' kiszínezhető Δ színnel. Ebből kapjuk K_2 egy Δ–színezését, ahol v_1 és v_2 színe megegyezik. Megint K_1–ben a színek alkalmas cseréjével elérhetjük, hogy v_1 és v_2 színe K_1–ben és K_2–ben ugyanaz legyen, így összeilleszthetjük a két komponenst, és megkapjuk G színezését Δ színnel.

KÉSZ!

Páratlan körre és teljes gráfra egyébként könnyen látható, hogy $\chi = \Delta + 1$.