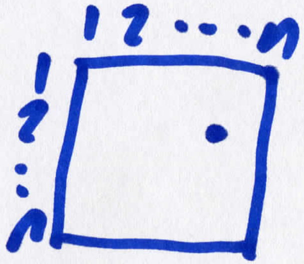
Gráf algoritmusok, legrövidebb utak

Gráfok megadása.

1. Szomszédossági mátrix: sorok: csúcsok
oszlopok: csúcsok



$a_{ij} \begin{cases} 0 & \text{ha } v_i v_j \text{ nem szomszédos} \\ 1 & \text{ha szomszédos} \end{cases}$ } irányítatlan gráf, szimmetrikus mátrix

$a_{ij} \begin{cases} 0 & \text{nem szomszédos} \\ 1 & v_i \rightarrow v_j \text{ él} \end{cases}$ } irányított gráf

a_{ij} = $v_i v_j$ él súlya : súlyozott gráf

vagy $v_i v_j$ élek száma: multigráf

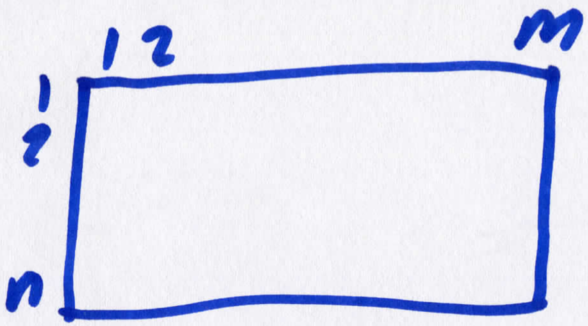
a_{ii} :  hurokél

v_i

méret : $n \cdot n$

1. Illeszkedési mátrix

sorok: csúcsok
oszlopok: élek



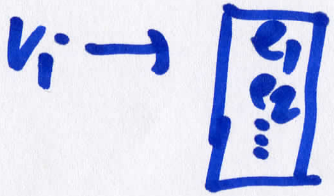
$$a_{ij} \begin{cases} 0 & v_i \text{ és } e_j \text{ nem illeszkednek} \\ 1 & \text{illeszkednek} \end{cases} \Bigg\} \text{ irányítatlan}$$

$$a_{ij} \begin{cases} 0 & \text{nem illeszednek} \\ 1 & v_i \;\; e_j \text{ kezdőpontja} \\ -1 & v_i \;\; e_j \text{ végpontja} \end{cases} \Bigg\} \text{ irányított}$$

méret: $n \cdot m$

3. Éllista:

Minden csúcshoz: illeszkedő élek listája.



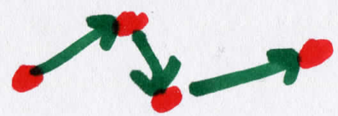
méret: $\sim m$

Kevés élű gráfokon jobb lehet, mint a szomszédossági, illeszkedési mátrix.

Irányítatlan gráf <u>összefüggő</u>: mindenhonnan mindenhova el lehet jutni.

Irányítatlan gráf: egyértelműen felbomlik összefüggő komponensekre.

Irányított gráf <u>erősen összefüggő</u>: mindenhonnan mindenhova el lehet jutni <u>irányított úton</u>



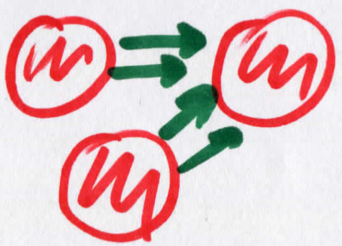
Irányított gráf: $u \simeq v$: ha $u \to v$ és $v \to u$
(u-ból el lehet jutni v-be és vissza)

$\simeq$ reflexív: $v \simeq v$

szimmetrikus: $u \simeq v \Leftrightarrow v \simeq u$

tranzitív: $u \simeq v,\ v \simeq w \Rightarrow u \simeq w$

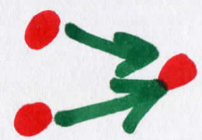
Ekvivalencia reláció!



Osztályok: erősen összefüggő

Osztályok között csak egy irányú élek (vagy semmi) $\Longrightarrow$

Redukált gráf: komponens $\to$ csúcs

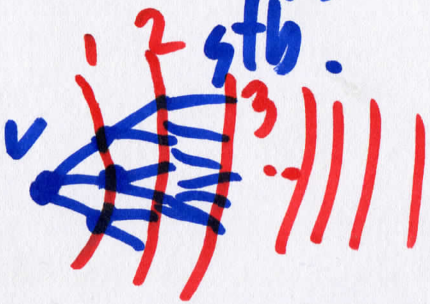


Gráf bejárás: felderítés, feszítő fa/erdő építés, csúcsokhoz/élekhez valamilyen paraméter kiszámítása, stb.

Két alap: DFS: Mélységi bejárás jövő héten

BFS: Szélességi bejárás MOST

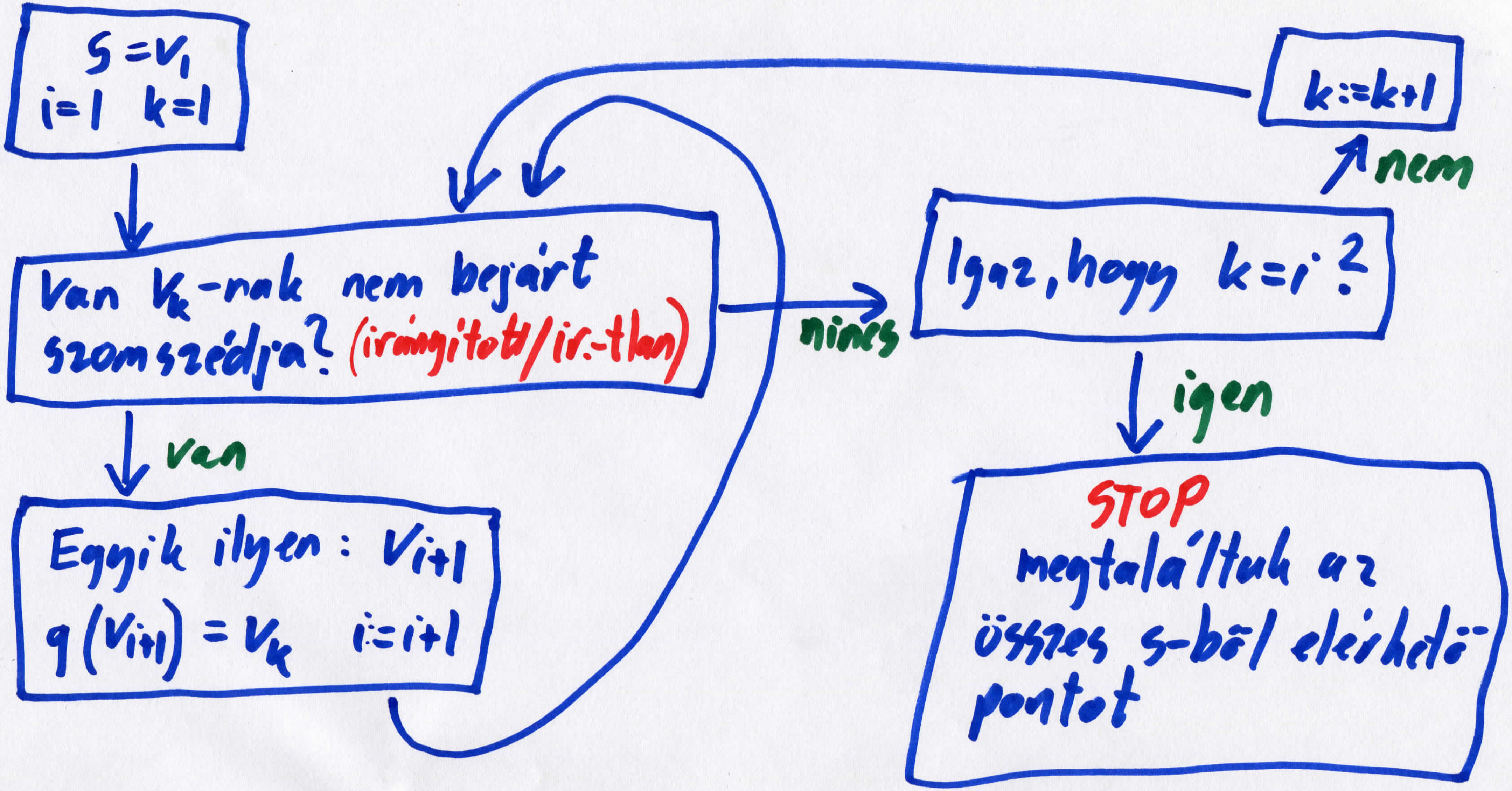
BFS: egy v csúcsból. először: szomszédok, aztán másodszomszéd



....

Lehet irányított vagy irányítatlan gráfon is.

BFS, szélességi bejárás/keresés s-ből



q: előd. i: utolsó felderített pont.
k: ahonnan éppen keresünk.

Lépésszám: $c(n+m)$ optimális

Legrövidebb utak.

G: irányított gráf, út hossza: élek száma. s: csúcs.

Legrövidebb utak s-ből a többi csúcsba:

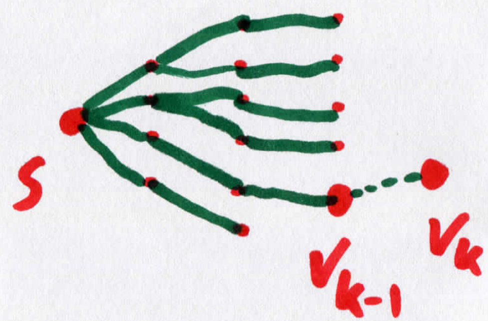
BFS fa s-ből: legrövidebb utak fája.

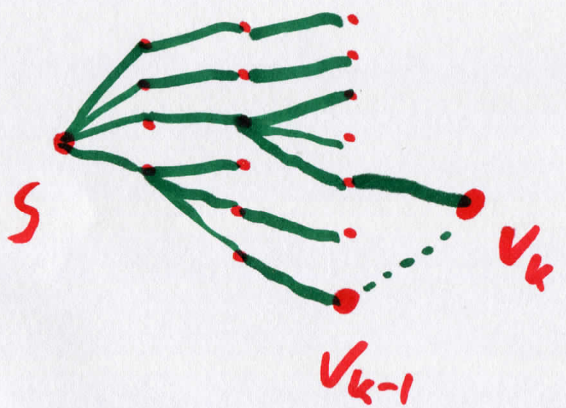
Állítás: v tetsz csúcs, $k = sv$ távolság G-ben $=$ sv út hossza a BFS fában.

Biz: indukció k-ra. $k=0$: $v=s$, trivi.

$k>0$, kisebbre már tudjuk. $s=v_0 v_1 \dots v_{k-1} v_k = v$: egy legrövidebb sv út G-ben.

Indukció: v_{k-1} a $k-1$-ik szinten van a BFS fában. Amikor v_{k-1}-ből keresünk: vagy bevesszük a $v_{k-1}v_k$ élt. (→ KÉSZ) vagy nem, mert v_k már fel van derítve! (→ KÉSZ)





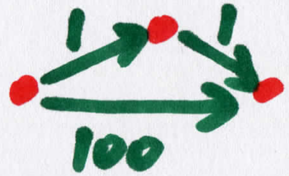
Dijkstra algoritmus.

Éleken <u>pozitív súlyok.</u> $v_i v_j$: $c(i,j)$

Út hossza: élek súlyainak az összege.

Kérdés: s-ből összes többibe legrövidebb út hossza.

BFS nem jó:

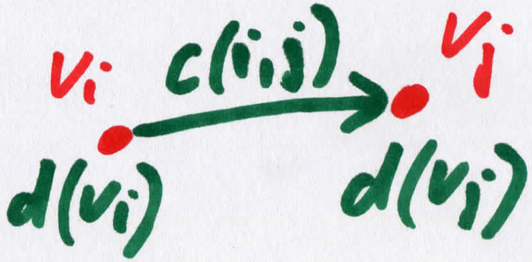


Min sv út: $D(v)$

Módszer: minden v csúcsra becslés: $d(v) \geq D(v)$.

Javítgatjuk, amíg végül minden v-re $d(v) = D(v)$

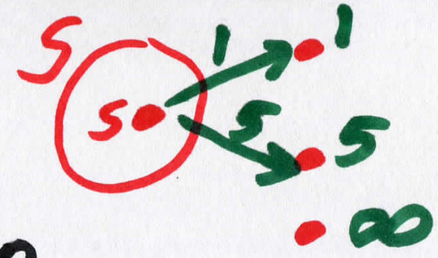
Tipikus lépés:
él mentén javítás:



Ha $d(v_i) + c(i,j) < d(v_j)$, akkor legyen

$$d(v_j) = d(v_i) + c(i,j)$$

$S \subset V(G)$: „KÉSZ" csúcsok: $d(v) = D(v)$.
$T = V \setminus S$: még nincs kész.



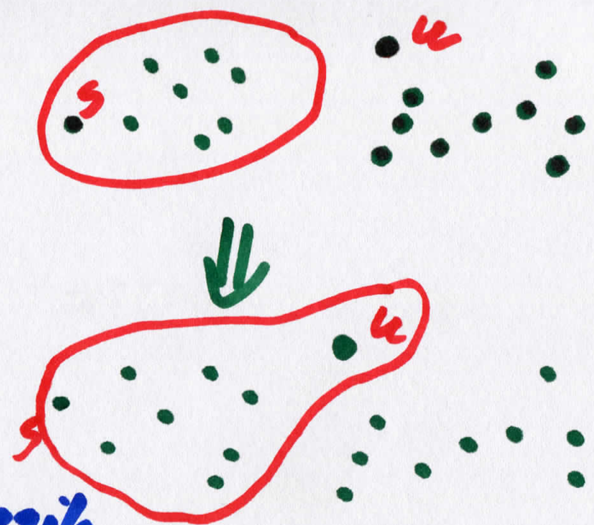
$S = \{s\}$ $\quad d(s) = 0 \quad d(v_i) = c(s, v_i)$ vagy ∞.

Ciklus:
0. Ha T üres: KÉSZ
1. $u \in T$, amelyre $d(u)|_{u \in T}$ minimális
2. u-t átrakjuk S-be
3. u-ból minden út $|_{t \in T}$ élen javítunk.

Állítás: ciklus végén/elején: 1. ha $v \in S$, akkor $d(v)$ = legrövidebb út hossza csupa S-belin keresztül.
2. ha $v \in S$, akkor $d(v) = D(v)$
3. ha $v \in T$, akkor $d(v)$ = legrövidebb út hossza csupa S-belin keresztül.

Biz: indukció. Elején igaz, triviális.

1. $v \in S$: $d(v)$ a min út S-belieken át.
2. $v \in S$: $d(v) = D(v)$
3. $v \in T$: $d(v)$ a min út S-belieken át.



Biz: ind. elején igaz.

Újabb ciklus, tfh előtte igaz volt.

1: $S \setminus u$-ra megvan. u-ra: 3.-ból következik.

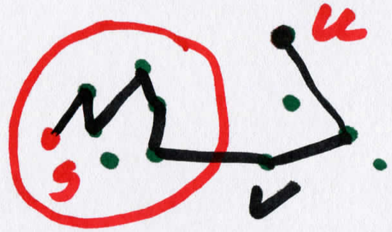
2: $S \setminus v$-ra megvan. Tfh $D(u) < d(u)$,

nézzük ~~az~~ a $D(u)$ hosszúságú utat:

kilép S-ből, v-be. De: idáig már

$\geq d(v)$ hossz! $d(v) > d(u)$ és minden súly

pozitív. ↯



3. Legyen $v \in T$. Eddig: $d(v)$ = min út S-belieken át.

Most: $u \to S$, de javítottunk az uv élen!

$\to d(v)$ = min út S-belieken át.

KÉSZ

Futási idő: $c \cdot m$

Dijkstra irányítatlanra:

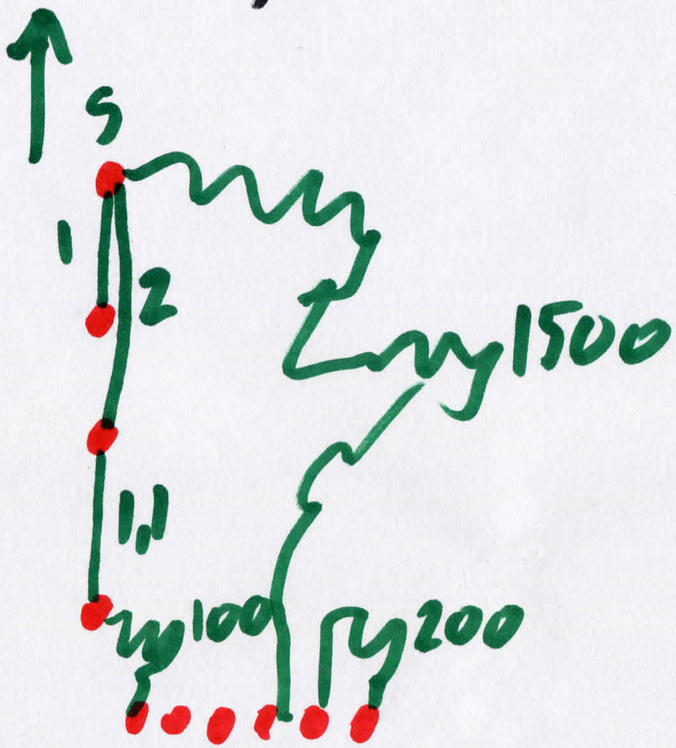
csúcsok: golyók.

élek: madzagok, $c(i,j)$ hosszú.

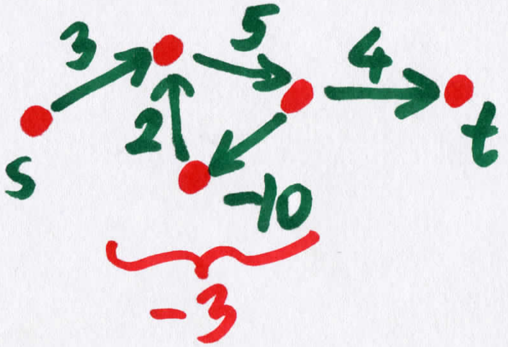
Tegyük le az asztalra és emeljük, s-nél fogva

v elkezd emelkedni : $v \longrightarrow s$ (kész)

megvan a legrövidebb út : ami emeli!



Eddig (BFS, Dijkstra) G lehetett irányított/irányítatlan.
Mostantól: <u>irányított</u>. Élsúly $c(i,j)$ lehet <u>negatív</u> is!



Min. $s \to t$ élsorozat? $\boxed{-\infty}$

Ha van negatív kör (és pl. erősen öf)
akkor min $s \to t$ élsorozat $= \underline{-\infty}$

Ha nincs negatív kör: min $s \to t$ élsorozat: út
(nincs csúcs, él ismétlődés)

$\longrightarrow$ max $n-1$ élből áll.

Ford, Floyd: min. út, negatív súly lehet,
negatív kör nem

Ford. Min. utak s-ből mindenhova. Tfh nincs negatív kör.

Élek: $e_1\ e_2 \cdots e_m$.

Legyen $\underline{d(s)=0}$, $\underline{d(v)=\infty}$ ha $v \neq s$.

Ciklus: javítás sorban az $e_1\ e_2 \cdots e_m$ élek mentén.

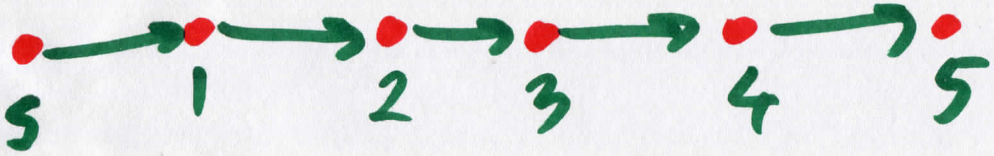
ismétel $\underline{n-1}$-szer.

Állítás: ha v-be a legrövidebb út k élből áll, akkor k ciklus után $d(v)=D(v)$.

Biz: ind. k-ra. Legrövidebb út: $s=v_0 v_1 \cdots v_{k-1} v_k = v$

k-1 ciklus után $d(v_{k-1})=D(v_{k-1})$

következő ciklusban: $d(v_k)=d(v_{k-1})+c(v_{k-1}, v_k)=D(v_k)$



i: i-edik ciklusban megvan a minimum.

Ford: Nem tudjuk, hogy van-e negatív kör.

ciklus: javítás $e_1 \dots e_m$ élek mentén. ismétel $\underline{\underline{n}}$-szer.

Ha nincs negatív kör: $n-1$ ciklus után kész:
$d(v) = D(v) \quad \forall v$. n-edik ciklus: nincs sehol javulás.

Ha van negatív kör: n-edik körben is van valahol javulás.

Tehát: Ford, n ciklus. Ha utolsó körben van jav $\rightarrow$ negatív kör.

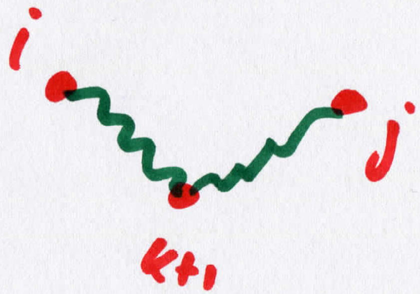
Ha nincs jav $\rightarrow$ megvannak a min. utak!

Futási idő: $m \cdot n$

Floyd: Tfh nincs negatív kör. Legrövidebb utak, mindenhonnan mindenhova.

$D_k(i,j)$: $i \longrightarrow j$ min. út, aminek a belső pontjai $1, 2 \dots k$ lehetnek.

$D_0(i,j)$ trivi : $c(i,j)$



$$D_{k+1}(i,j) = \min\Big(D_k(i,j),\ D_k(i,k+1) + D_k(k+1,j)\Big)$$

(k+1 max 1-szer lehet a min. úton mert nincs neg. kör)

Futás: n^3 . n. Ford is jó: $n^2 \cdot m$