Egy extremális probléma

Gerbner Dániel

2005.

1. Bevezetés

Az extremális halmazrendszerek elméletének két alapvető eredménye Sperner tétele és az Erdős-Ko-Rado-tétel.

Jelölések: Ha n egy természetes szám, legyen $[n] = \{1, \dots, n\}$. Egy V halmaz hatványhalmazát jelölje 2^V, Az összes k elemű részhalmazát $\binom{V}{k}$, a legfeljebb k elemű részhalmazait $\binom{V}{\leq k}$. Egy F halmaz komplementerét jelölje $\overline{F}$.

1. Definíció. *$\mathcal{F}$ Sperner-rendszer (vagy antilánc), ha bármely $A, B \in \mathcal{F}$ halmazokra $A \not\subset B$.*

1. Tétel (Sperner [9]). *Ha $\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ Sperner-rendszer, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$, sőt fennáll a következő LYM-egyenlőtlenség([6],[10],[7]):*

$$\sum_{F \in \mathcal{F}} \frac{1}{\binom{n}{|F|}} \leq 1,$$

és $\mathcal{F}$-nek csak akkor van $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ eleme, ha mindegyik halmaz $\lfloor n/2 \rfloor$ vagy mindegyik $\lceil n/2 \rceil$ elemszámú.

2. Definíció. *$\mathcal{F} \subset 2^{[n]}$ metsző, ha bármely $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ halmazok választása esetén $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.*

2. Tétel (Erdős-Ko-Rado [2]). *Ha $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{k}$ metsző, $k \leq n/2$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \binom{n-1}{k-1}$.*

Vizsgálhatjuk azokat a halmazrendszereket is, amik a kétféle feltétel vegyítésével jönnek létre. Ha megköveteljük, hogy $\mathcal{F}$ metsző és Sperner-rendszer legyen egyszerre, akkor egy sokat vizsgált területhez jutunk ([8], [1], [4],[3]). Gyengíthetjük is a feltételeket. Például egy Y halmaz lehet diszjunkt egy Z halmaztól, vagy tartalmazhatja X-et, csak a kettő egyszerre nem történhet meg vele. Vegyük ide még azt a feltételt is, hogy minden halmaz mérete legfeljebb k. Tehát:

$$\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{\leq k} \text{ és nincs olyan} X, Y, Z \in \mathcal{F} \text{ amelyekre} X \subset Y \text{ és } Y \cap Z = \emptyset, \qquad (1)$$

vagy még egy új megfogalmazásban: a valamit tartalmazó halmazokat mindenki metszi.

3. Tétel. *Az (1) tulajdonságú halmazrendszerek mérete nem haladhatja meg a következő három halmazrendszer legnagyobbjának méretét (n-től és k-tól függ, hogy az melyik):*

$$\mathcal{F}_1 := \{F \subset [n] : |F| = k\},$$

$$\mathcal{F}_2 := \{F \subset [n] : 1 \in F, |F| \leq k\},$$

$$\mathcal{F}_3 := \{F \subset [n] : \lceil n/2 \rceil \leq |F| \leq k\} \cup \{F \subset [n] : |F| = \lfloor n/2 \rfloor, 1 \in F\}.$$

Könnyű belátni, hogy ezek eleget tesznek a feltételeknek. $\mathcal{F}_1$ Sperner-rendszer, $\mathcal{F}_2$ metsző, $\mathcal{F}_3$-ban pedig a diszjunkt Y és Z szerepét csak $\lceil n/2 \rceil$ és $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű halmazok játszhatnák, de akkor páros n esetén Y-nak nem lehetne részhalmaza, páratlan n esetén pedig $1 \in Y$, így Y mindegyik $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű halmazt metszi.

Ha $k \leq n/2$, akkor Sperner tételéhez hasonlóan bizonyítható, hogy $\mathcal{F}_1$ a legnagyobb Sperner-rendszer. A LYM-egyenlőtlenség bal oldalához ugyanis ott minden halmaz legalább $\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}}$-t ad, vagyis összesen legfeljebb $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ halmazunk lehet. Ha viszont minden halmaz legfeljebb k elemű és $k \leq n/2$, akkor mindkét helyre az $\lfloor n/2 \rfloor$ helyére k-t írhatunk. (Könnyű meggondolni, hogy ha $k > n/2$, akkor egy Sperner-rendszer nemcsak hogy nem lehet a legnagyobb (1) tulajdonságú rendszer, de még tovább is bővíthető).

$\mathcal{F}_2$ pedig a legnagyobb metsző rendszer, ugyanis ha i és $n - i$ is legfeljebb akkora, mint k, akkor ezen a két szinten legfeljebb $\binom{n}{i}$, azaz az összes halmaz fele lehet egy metsző halmazrendszerben, mivel egy halmaz és a komplementere közül az egyik kimarad. Ha viszont $i \leq k < n - i$, akkor $i < n/2$, így az Erdős-Ko-Rado tétel miatt legfeljebb $\binom{n-1}{i-1}$ halmazunk lehet i elemű. Mindkét esetben $\mathcal{F}_2$ ezt a maximumot adja.

2. A kör-módszer

A 2. Tétel legegyszerűbb bizonyítása a Katona-féle kör-módszerrel([5]) történik. Ezt alkalmazzuk itt is. Egy ciklikus permutáció az alaphalmaz elemeit egy körbe viszi. A ciklikus permutációk halmazát jelölje Π. Ha $\pi \in \Pi$ és $F \subsetneq [n]$, akkor $\pi(F) = \{\pi(x) : x \in F\}$. A kör valahány egymást követő elemét intervallumnak nevezzük. Legyen $\mathcal{H}$ a kör intervallumainak a halmaza. Vizsgáljuk az eredeti problémát az olyan halmazrendszerekre, amiknek minden eleme a kör egy intervalluma, de ezúttal súlyozzunk minden G halmazt $\binom{n}{|G|}$-vel. Definiáljuk a körön is a megfelelő halmazrendszereket:

$$\mathcal{G}_1 := \{G \in \mathcal{H} : |G| = k\} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{H},$$

$$\mathcal{G}_2 := \{G \in \mathcal{H} : 1 \in G, |G| \leq k\} = \mathcal{F}_2 \cap \mathcal{H},$$

$$\mathcal{G}_3 := \{G \in \mathcal{H} : \lceil n/2 \rceil \leq |G| \leq k\} \cup \{G \in \mathcal{H} : |G| = \lfloor n/2 \rfloor, 1 \in G\} = \mathcal{F}_3 \cap \mathcal{H}.$$

4. Tétel. *Az (1) tulajdonságú,intervallumokból álló halmazrendszerekre igaz:*

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} \binom{n}{|G|} \leq \max_{1 \leq i \leq 3} \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \binom{n}{|G|}.$$

E tétel bizonyítása előtt megmutatjuk, hogy ebből következik a 3. Tétel. Előbb azonban érdemes bevezetni a

$$b(\mathcal{G}) = \sum_{G \in \mathcal{G}} \binom{n}{|G|}$$

jelölést.

A 3. Tétel bizonyítása. Legyen $\mathcal{F}$ egy (1) tulajdonságú halmazrendszer, $\emptyset, [n] \notin \mathcal{F}$. Számoljuk ki kétféleképpen a

$$K := \sum_{(F \in \mathcal{F}, \pi \in \Pi) : \pi(F) \in \mathcal{H}} \binom{n}{|F|}$$

számot. Egyrészt bármely F-hez $|F|!(n-|F|)!$ olyan ciklikus permutáció van, ami őt intervallumba viszi, ezért $K = |\mathcal{F}|n!$. Másrészt minden π esetén a megfelelő halmazok egy (1) tulajdonságú intervallumrendszer ősképét alkotják, és a permutáció a súlyukat sem változtatja meg, így alkalmazható rájuk a 4. Tétel. Tegyük fel, hogy ott a maximum $\mathcal{G}_i$-n vétetik fel, ekkor minden π esetén legfeljebb $b(\mathcal{G}_i)$ az összsúly, K tehát összesen legfeljebb $(n-1)!$-szor ennyi. Azt kaptuk, hogy

$$|\mathcal{F}|n! \leq \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \binom{n}{|G|}(n-1)!, \text{ azaz}$$

$$|\mathcal{F}| \leq \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \binom{n}{|G|}(n-1)!/n! = \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \frac{\binom{n}{|G|}}{n} = |\mathcal{F}_i|.$$

Az utolsó egyenlőség abból következik, hogy minden l-re l elemű halmazból vagy n darab van $\mathcal{G}_i$-ben és $\binom{n}{l}$ darab $\mathcal{F}_i$-ben, vagy l illetve $\binom{n-1}{l-1}$ darab.

Ez a számolás nem működik, ha $\emptyset$ vagy $[n]$ benne van $\mathcal{F}$-ben (őket nem $0!n!$ ciklikus permutáció viszi intervallumba, hanem csak (n-1)!, mert csak ennyi van). Ha $\emptyset \in \mathcal{F}$, akkor a többi halmaz metsző Sperner-rendszert alkot. Ennek kell egyszersmind a legnagyobb Sperner-rendszernek lennie, hogy az üreshalmazzal együtt túlszárnyalja $\mathcal{F}_1$ méretét. Ez csak akkor lehet, ha n páratlan, $k > n/2$. Ekkor $n > 3$ esetben $\mathcal{F}_2$ legalább olyan jó, $n \leq 3$ esetben $\mathcal{F}_3$ legalább olyan jó. Ha $[n] \in \mathcal{F}$, akkor $k \geq n$, de akkor $[n]$ mindenképpen hozzávehető, tehát ez nem tehet különbséget nem bővíthető halmazrendszerek között (akkor már $\mathcal{F}_1$ úgyis kisebb, mint $\mathcal{F}_2$).■

3. A 4. Tétel bizonyítása

A tételt indirekt módon bizonyítjuk. Jelöljük $\mathcal{G}$-vel az (egyik) olyan (1) tulajdonságú halmazrendszert a körön, amire $b(\mathcal{G})$ a legnagyobb. Tegyük fel, hogy $\mathcal{G} \neq \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2, \mathcal{G}_3$. Legyen $m = \min\{|G| : G \in \mathcal{G}\}$. Feltehető, hogy $m < k$ és $m < n/2$. Ha $G \in \mathcal{G}$ és $n - m < |G| \leq k$, akkor $G \in \mathcal{G}$, hiszen nincs tőle diszjunkt halmaz $\mathcal{G}$-ben. Amíg m-et nem akarjuk megváltoztatni, elegendő a legfeljebb $n-m$ elemű halmazokat vizsgálni. Ez történik a következő két lemmában.

1. Lemma. *Van olyan $A, B \in \mathcal{G}$, amikre $|A| = m$ és $B = A \cup \{x\}$, ahol x jobb oldali szomszédja A-nak.*

Bizonyítás. Minden m elemű A halmazt cseréljünk ki $A \cup \{x\}$-re, ahol x jobb oldali szomszédja A-nak. Ekkor $b(\mathcal{G})$ nőne, tehát ezt nem tehetjük meg. Vagy valamelyik új halmaz már benne volt $\mathcal{G}$-ben (épp ezt akartuk), vagy létrejött a kizárt X, Y, Z konfiguráció. Ebben egy új elem nem lehet X vagy Z, hiszen akkor az elődje is megfelelt volna. De Y sem lehet, hiszen $m+1$ elemű, és az összes m elemű halmazt kitöröltük $\mathcal{G}$-ből. ■

2. Lemma. *Lehet úgy választani $\mathcal{G}$-t, hogy mindegyik $\mathcal{G}$-beli halmaz metszi az előbbi A-t, legfeljebb egy kivétellel és az csak A komplementere lehet.*

Bizonyítás. Feltehető, hogy $A = [1, m]$, $B = [1, m+1]$. Minden halmaz metszi B-t, így ami nem metszi A-t, az $m+1$-ből megy jobbra, és nem ér el 1-ig. Csak egy ilyen lehet, mert különben az egyiket tartalmazná a másik, és még az is diszjunkt

A-tól. Jelölje D ezt az intervallumot. Ha $\overline{D} \neq A$, akkor $\overline{D}$ nem lehet $\mathcal{G}$-beli, mert tartalmazza A-t és diszjunkt D-től. Ekkor cseréljük ki D-t $\overline{D}$-re (ezzel $b(\mathcal{G})$ nem változik). Mivel $\overline{D}$ tartalmazza A-t, mindent metsz $\mathcal{G} - \{D\}$-ből, így gond nélkül hozzávehető, és így olyan $\mathcal{G}$-t kaptunk, amilyet akartunk. Egy gond lehet már csak, ha $|\overline{D}| > k$. Ekkor egy $n/2$, vagy, ha $n/2 > k$, akkor k hosszú, m-ből balra menő intervallumot vegyünk, ez legyen D'. Ez $\overline{D}$-hez hasonlóan tartalmazza A-t és diszjunkt D-től, vagyis D ugyanúgy kicserélhető rá, és ezzel $b(\mathcal{G})$ nem csökken, hiszen egy intervallum helyett egy olyan intervallumot tettünk be, aminek a súlya a lehető legnagyobb a feltételeink mellett.■

A 4. Tétel bizonyítása. Ha $n - m < |G| \leq k$, akkor minden $\mathcal{G}$-beli halmaz metszi G-t, vagyis G-t minden probléma nélkül hozzávehetnénk $\mathcal{G}$-hez, ha még nem lenne benne. Ha $G = n - m$, akkor G metsz minden olyan $\mathcal{G}$-beli halmazt, ami tartalmaz valamit, hiszen azok legalább $m+1$ eleműek. Így G-ről szintén feltehető, hogy benn van az intervallumrendszerünkben. Tegyük fel, hogy A-ra teljesülnek az előbbi lemmák. Ha G egy A-t tartalmazó intervallum, $|G| \leq k$, akkor minden $\mathcal{G}$-beli elem metszi G-t, így hozzávehető lenne $\mathcal{G}$-hez, ha még nem lenne benn. Mivel a többi halmaz nem tartalmazza A-t, de metszi, valamelyik pontjából indulnak valamelyik irányba, hosszuk pedig m és $k' := \min(k, n - m - 1)$ között van. Jelölje ezek halmazát $\mathcal{G}_0$. Osszuk fel $\mathcal{G}_0$-t aszerint, hogy melyik pontból melyik irányba mennek.

$$\mathcal{A}_i := \{[x,i] \in \mathcal{G} : x \in [n], |[x,i]| \leq k'\},\ i = 1 \ldots m-1$$

$$\mathcal{B}_i := \{[i,y] \in \mathcal{G} : y \in [n], |[i,y]| \leq k'\},\ i = 2 \ldots m$$

Ezeket párosíthatjuk $\mathcal{A}_i$, $\mathcal{B}_{i+1}$ párokba. Vizsgáljuk ezeknek a pároknak az elemeit.

1. eset: Ha az egyiknek nincs eleme, akkor a másiknak lehet legfeljebb egy-egy m, $m+1$,...,k' hosszú eleme.

2. eset: Mindkettőnek egy eleme van, a legnagyobb összsúlyt az adja, ha mindkettő $\lceil n/2 \rceil$, vagy ha $k' < n/2$, akkor k' hosszú.

3. eset: Az egyiknek, pl. $\mathcal{A}_i$-nek van egy legkisebb (r hosszú) eleme, R (így legfeljebb $k' - r + 1$ eleme lehet), $\mathcal{B}_{i+1}$-nek pedig legalább két eleme. Ekkor a legkisebbet leszámítva mind metszi R-t, így hosszuk legalább $n - r + 1$. $\mathcal{B}_{i+1}$-nek tehát $k' - (n - r) + 1$ eleme lehet legfeljebb. Összesen legfeljebb $2k' - n + 2$ elemük lehet, egy-egy r, $r+1$,...,k' illetve egy-egy $n - r + 1$,...,k' elemű és egy legfeljebb $n - r$ elemű halmaz, S. Legyen $\mathcal{D} = \mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1} - \{S\}$. Ekkor $b(\mathcal{D})$-t r választása nem befolyásolja, persze hogyha r és $n - r + 1$ sem haladja meg k'-t. Ha például r helyett $r+1$-et veszünk $\mathcal{A}_i$-be, akkor $b(\mathcal{A}_i)$ csökken $\binom{n}{r}$-rel, de $b(\mathcal{B}_{i+1} - \{S\})$ nő $\binom{n}{n-r}$-rel. Feltehető, hogy $r = \lceil n/2 \rceil$ és $n - r + 1 = \lfloor n/2 \rfloor + 1$. Éppen ezzel érjük el biztosan, hogy egyik sem haladja meg k'-t. Ha valamelyik (nyilván $n - r + 1$) mégis meghaladná k'-t, akkor $k < \lfloor n/2 \rfloor + 1$, és akkor nem lehet egyszerre r és $n - r + 1$ elemű halmazunk. Emellett S súlya is ekkor lesz a maximális, ugyanis így választható $n - r$, azaz $\lfloor n/2 \rfloor$ eleműnek. Tehát $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ akkor lesz (az egyik)

legnagyobb, ha $\mathcal{A}_i$ a legalább $\lfloor n/2 \rfloor$ elemű, $\mathcal{B}_{i+1}$ pedig a legalább $r = \lceil n/2 \rceil$ elemű intervallumokból áll.

Meghatároztuk tehát azt a három halmazrendszert, amik közül valamelyik a legnagyobb $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1}$-et adja, persze n-től, k-tól és m-től függ, hogy a három közül melyik. Bármelyik is a legjobb ezek közül külön egy $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ párra, van olyan halmazrendszer, ami minden párra az optimumot adja.

Ha az összes $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{1+1}$ pár súlyát összeadjuk, $2b(\mathcal{G} - \mathcal{G}_0)$-t kapunk, mert minden halmazt kétszer számoltunk. Másrészről viszont természetesen legfeljebb $nb(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$-t kaphatunk, ez tehát ad egy felső korlátot a $\mathcal{G} - \mathcal{G}_0$ halmazrendszer méretére. Ha egy $\mathcal{G}'$ halmazrendszer minden párra a legnagyobb $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ súly adja, akkor az tényleg eléri a maximális $\frac{n}{2} b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ összsúlyt. Mindhárom esetben találni fogunk ilyen halmazrendszert.

Ha az 1. eset adja a legnagyobb $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ értéket, akkor $\mathcal{G}' := \{[x, i] : x \in [n], |[x, i]| \leq k'\}$, $i = 1 \ldots m - 1$. Vagyis az összes lehetséges intervallum bekerült minden $\mathcal{A}_i$-be, A minden pontjából az egyik irányba indul az összes legalább m, de legfeljebb $k$méretű intervallum. Ha $k < n - m$, akkor minden $G \in \mathcal{G}' \cup \mathcal{G}_0$ esetén $1 \in G$, tehát $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_2$. Ha $k \geq n - m$, akkor minden $n - m$ elemű intervallum is ott van. Tehát a halmazrendszerünk: az összes 1-et tartalmazó intervallum m-től k-ig, de a legalább $n - m$ eleműek közül az összes többi is. Már csak az a kérdés, hogy mekkora m. Ha m helyett $m + 1$-et veszünk minimumnak, akkor elvesztjük az m darab m elemű halmazt, de kapunk $m + 1$ darab $n - m - 1$ eleműt, ezzel nyilván növekszik az összsúly, ha $m < \lfloor n/2 \rfloor$, vagyis ha a halmazrendszerünk nem $\mathcal{G}_3$.

Ha a 2. eset adja a legnagyobb $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ értéket, akkor megintcsak megadhatunk egy olyan $\mathcal{G}'$-t, ami minden $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ párra az optimumot adja: A minden pontjából indítsunk el jobbra és balra is egy-egy k' vagy $\lceil n/2 \rceil$ hosszú intervallumot. Ekkor van 1 darab m, 2 darab $m + 1$,..., $k' - m$ darab $k' - 1$ elemű és $k' - m + 1$ darab k' elemű intervallumunk, valamint $2m - 2$ darab k vagy $\lceil n/2 \rceil$ elemű, plusz $\overline{A}$ és az összes olyan intervallum, aminek a hossza k'-nél nagyobb, de legfeljebb k. Ha m helyett $m + 1$-et veszünk, akkor egy-egy $m, \ldots, k$ elemű halmaz helyett két k vagy $\lceil n/2 \rceil$ eleműt kapunk, és esetleg k' csökkenése miatt is nyerünk néhány új halmazt. De már azok nélkül is csak növelhettük $b(\mathcal{G})$-t, hiszen pont azért választottuk az 1. eset helyett a 2. esetet, mert két k vagy $\lceil n/2 \rceil$ elemű halmaz többet adott $b(\mathcal{G})$-hez, mint egy-egy $m, \ldots, k$ elemű. Végül $m = k$ a legkedvezőbb, pedig már azt kizártuk, vagy eljutunk $m = \lceil n/2 \rceil$-ig, amit szintén kizártunk.

Ha a 3. eset adja a legnagyobb $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ értéket, akkor megint találunk megfelelő $\mathcal{G}'$-t: az egyik irányba A minden pontjából a legalább $\lfloor n/2 \rfloor$, a másik irányba A minden pontjából a legalább $\lceil n/2 \rceil$ elemű intervallumok menjenek. Megint m-et növeljük eggyel. Az A-t tartalmazók közül veszítünk egy-egy $m, \ldots, k'$ elemű halmazt, de nyerünk egy $\mathcal{A}_i$-t és egy $\mathcal{B}_{i+1}$-et, plusz az eddig esetleg hiányzó $n - m$ hosszú intervallumokat is bevehetjük. Mivel nem az 1., hanem a 3. esetnél vagyunk, a $b(\mathcal{G})$ megint csak nőhet. Végül ismét $\mathcal{G}_3$-at kapjuk.■

Ezzel tehát kész a 4. Tétel, így a 3. Tétel bizonyítása is.

4. Megjegyzések

Persze rögtön további kérdések merülnek fel. Például előfordul-e egyáltalán mind a három halmazrendszer maximumként? Erre még könnyű válaszolni: igen. $\mathcal{F}_1$-re példa a $k = 1$ eset, ha $k = n$, akkor viszont nyilvánvaló, hogy $\mathcal{F}_3$ az optimális, ha pedig k az $n/2$ közelében van, akkor $\mathcal{F}_2$-nek nagyságrendileg $2^n/4$ eleme van, a másik kettőnek pedig $2^n/\sqrt{n}$. Kis számolással az is belátható, hogy konkrét n esetén, ha $n > 13$, akkor mind a három rendszer elő fog állni maximumként. Hogy mely (n, k) párra melyikben lesz több, abba nem érdemes mélyebben belemenni, hiszen egyszerűen csak a binomiális együtthatókkal való számolás.

Vegyük észre, hogy a 4. Tétel bizonyításában nem igazán használtuk ki az $\binom{n}{|G|}$ súlyfüggvény speciális tulajdonságait, csak annyit, hogy G és $\overline{G}$ súlya ugyanakkora, és ha egy $\lfloor n/2 \rfloor$-nál kevesebb elemű halmazt eggyel nagyobbra cserélünk, a súly nem csökken. A 4. Tétel igaz lenne bármely ilyen tulajdonságú súlyfüggvénynél. Speciálisan konstans súllyal is. Ebből például kijön, ugyanúgy kettős leszámlálással, hogy az (1) tulajdonságú és az üres halmazt nem tartalmazó halmazrendszerek közül $\frac{1}{\binom{n}{|F|}}$ súly esetén is $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ vagy $\mathcal{F}_3$ a legnagyobb.

Félig megadtuk a választ arra a kérdésre is, hogy akkor mi a maximum, ha a kizárt konfiguráció $X \subset Y$, $X \cap Z = \emptyset$. Ugyanis az ennek eleget tevő halmazrendszerek a korábbi feltételnek is eleget tesznek, így bizonyos k-kra (speciálisan ha $k \leq n/2$) itt is $\mathcal{F}_1$ vagy $\mathcal{F}_2$ lesz az optimális. Az előző bizonyítás kis módosításával belátható, hogy ez minden k-ra igaz lesz.

5. Tétel. *Ha $\mathcal{F} \subset \binom{[n]}{<k}$ és $\mathcal{F}$-ben nincs X, Y, Z, amikre $X \subset Y$, $X \cap Z = \emptyset$, akkor $|\mathcal{F}| \leq \max\{|\mathcal{F}_1|, |\mathcal{F}_2|\}$.*

Bizonyítás. Itt $\emptyset \in \mathcal{F}$ nem lehet, csak ha egyáltalán nincs is három különböző halmaz $\mathcal{F}$-ben. Az $[n]$ ugyanúgy nem számít, mint az előző esetben, így elegendő a következő lemma:

3. Lemma. *A körön a hasonló tulajdonságú intervallumrendszerekre*

$$\sum_{G \in \mathcal{G}} \binom{n}{|G|} \leq \max_{1 \leq i \leq 2} \sum_{G \in \mathcal{G}_i} \binom{n}{|G|}.$$

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{G}$ az ilyen tulajdonságú intervallumrendszerek közül az, amire $b(\mathcal{G})$ a legnagyobb. Az előző problémával teljesen analóg módon $m = \min\{|G| :$

$G \in \mathcal{G}\} < k$ itt is feltehető. Itt is találhatunk olyan m elemű A halmazt, ami valódi részhalmaz, ellenkező esetben az m elemű intervallumokat kicserélhetnénk az őket tartalmazó $m+1$ elemű intervallumokra. A-t minden $\mathcal{G}$-beli halmaz metszi. Itt viszont szó sincs arról, hogy minden A-t tartalmazó vagy minden legalább $n-m$ elemű intervallum feltétlenül bent lenne $\mathcal{G}$-ben, hiszen ezek hozzávételével néhány olyan halmaz részhalmazzá válhatna, amit eddig nem tartalmazott semmi, és vannak tőle diszjunkt halmazok. De ezúttal elég lesz nekünk annyi is, hogy legfeljebb ezek vannak az $\mathcal{A}_i$ és $\mathcal{B}_i$ osztályokon kívül, vagyis pontosabban: azt a $\mathcal{G}^*$ halmazrendszert vizsgáljuk, ami úgy áll elő, hogy $\mathcal{G}$-hez hozzávesszük az A-t tartalmazó, vagy legalább $n-m+1$ elemű halmazokat. Ez után vizsgáljuk az $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ párokat. A 4. Tétel bizonyításához hasonló három eset van itt is, néhány kisebb eltéréssel.

1. eset: A maximális $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ értéket az adja, hogy csak az $\mathcal{A}_i$-nek vannak elemei. Találunk olyan halmazrendszert, ami minden $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ párra ezt adja: A minden pontjából az egyik irányba mennek az intervallumok. Ekkor az egész halmazrendszer metsző.

2. eset: A maximális $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ értéket az adja, hogy $\mathcal{A}_i$-nek és $\mathcal{B}_{i+1}$-nek is egy eleme van. Megint találunk olyan halmazrendszert, ami minden $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ párra ezt adja: A minden pontjából mindkét irányba megy egy-egy $\lceil n/2 \rceil$, vagy, ha $k \leq \lceil n/2 \rceil$, akkor k elemű intervallum. Ekkor m-et növeljük, teljesen ugyanúgy, mint az előző problémánál, nyerünk két k vagy $\lceil n/2 \rceil$ elemű intervallumot, vesztünk egy-egy $m, \ldots, k$ elemű halmazt, és mivel nem az első, hanem a második esetben vagyunk, ezzel a $b(\mathcal{G})$ nem csökkenhet. Végül $m = k$ esetben a legnagyobb, vagy eljutunk $m = \lceil n/2 \rceil$-ig, pedig ezt már kizártuk.

3. eset: A maximális $b(\mathcal{A}_i \cup \mathcal{B}_{i+1})$ értéket egy olyan pár adja, ahol mindkettőnek van eleme, az egyiknek, pl. $\mathcal{A}_i$-nek több is. $\mathcal{A}_i$ legkisebb elemét, az r elemű R intervallumot a másikból a legkisebb is metszi, tehát $\mathcal{B}_{i+1}$-ben $n-r+1$ elemű lesz a legkisebb intervallum. Tehát az egyikben a legalább r, a másikban a legalább $n-r+1$ elemű halmazok vannak. Ha $r < n/2$, akkor r-et növelve 1-gyel vesztünk egy r elemű halmazt és nyerünk egy $n-r$ eleműt. Ez nem csökkenti $b(\mathcal{G}')$-t, végül páratlan n-re $r = n-r+1 = \lceil n/2 \rceil$, páros n-re $r = n/2$. Ezt adja minden $\mathcal{A}_i, \mathcal{B}_{i+1}$ párra az a halmazrendszer, amiben a több, mint $n/2$ elemű halmazok vannak, és páros n-re még az $n/2$ eleműek fele. De ez még $k = n$-re is csak annyi halmaz, amennyi $\mathcal{G}_2$-ben van, kisebb k-ra pedig még kevesebb is.■

Itt is az előző problémához hasonlóan igaz, hogy $|\mathcal{G}| \leq \max\{|\mathcal{G}_1|, |\mathcal{G}_2|\}$. Ebből hasonlóképpen következik,hogy az általános esetben $\binom{n}{|F|}^{-1}$ súllyal is $\mathcal{F}_1$ vagy $\mathcal{F}_2$ a legnagyobb.

Hivatkozások

[1] B. Bollobás [1965]: On generalized graphs, *Acta. Math. Acad. Sci. Hungar.* **16**, 447-452.

[2] P. Erdős, C. Ko, R. Rado [1961]: Intersection theorems for systems of finite sets, *Quart. J. Math. Oxford* Ser. 2 **12**, 313-318.

[3] Péter L. Erdős, P. Frankl, G.O.H. Katona [1984]: Intersecting Sperner families and their convex hulls, *Combinatorica* **4**, 21-34.

[4] C. Greene, G.O.H. Katona, D.J. Kleitman [1976]: Extensions of the Erdős-Ko-Rado theorem, *SIAM* **55**, 1-8.

[5] G.O.H. Katona [1972]: A simple proof of the Erdős-Chao Ko-Rado theorem, *J. Comb. Theory* (B) **13**, 183-184.

[6] D. Lubell [1966]: A short proof of Sperner's lemma, *J. Comb Theory* **1**, 299.

[7] L.D. Meshalkin [1963]: A generalization of Sperner´s theorem on the number of subsets of a finite set, *Teor. Verojatnost i Primen.*, **8**, 219-220.(oroszul)

[8] E.C. Milner [1968]: A combinatorial theorem on systems of sets, *J. London Math. Soc.* **43**, 204-206.

[9] E. Sperner [1928]: Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27**, 544-548.

[10] K. Yamamoto[1954]: Logarithmic order of free distributive lattices, *J. Math. Soc. Japan* **6**, 347-357.